**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Брянский государственный инженерно-технологический университет»**

**О.Е. Антоненкова, И.М. Баранова, О.В. Камозина,
О.Н. Козлова, О.В. Охлупина, Н.А. Часова**

Математика будущему инженеру

Учебное пособие

Брянск 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Брянский государственный инженерно-технологический университет»

Кафедра «Математика»

Утверждено научно-методическим
советом БГИТУ
протокол № 5 от «28» *января 2021 г.*

Математика будущему инженеру

Учебное пособие для выпускников школ, колледжей

и желающих поступить в БГИТУ

Брянск 2021

УДК 51
ББК 22.1

Антоненкова О.Е. Математика будущему инженеру: [учеб. пособие] / О.Е. Антоненкова, И.М. Баранова, О.В. Камозина, О.Н. Козлова, О.В. Охлупина, Н.А. Часова. – Брянск: РИО БГИТУ, 2021. – 110 с.

Рецензенты:
Ивашкин Ю.А. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная механика и физика» Брянского государственного инженерно-технологического университета
Бендаж В.А. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математического анализа, алгебры и геометрии» Брянского государственного университета.

Рекомендованы редакционно-издательской и учебно-методической комиссиями факультета общенаучной подготовки и повышения квалификации БГИТУ. Протокол № 1 от «25» *января 2021 г.*

Содержание

1. Арифметические вычисления

Пример 1.1. Вычислить: $\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}$.

Решение. Вычисления выполним по действиям

1) $2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}=\frac{21}{8}-\frac{2}{3}\cdot\frac{33}{14}=\frac{21}{8}-\frac{11}{7}=\frac{147-88}{56}=\frac{59}{56}$;

2) $\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}=\left(\frac{37}{12}+4\frac{3}{8}\right):\frac{179}{9}=\left(\frac{37}{12}+\frac{35}{8}\right)\cdot\frac{9}{179}=$

$=\frac{74+105}{24}\cdot\frac{9}{179}=\frac{179}{24}\cdot\frac{9}{179}=\frac{3}{8}$;

3) $\frac{59}{56}:\frac{3}{8}=\frac{59}{56}\cdot\frac{8}{3}=\frac{59}{21}=2\frac{17}{21}$.

Ответ: $2\frac{17}{21}$.

Пример 1.2. Вычислить: $1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+\left(0{,}4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right)$.

Решение.

$1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+\left(0{,}4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right)=$

$=\frac{27}{20}:\frac{27}{10}+2+\left(\frac{4}{10}:\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{42}{10}-\frac{43}{40}\right)=\frac{27}{20}\cdot\frac{10}{27}+2+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{168-43}{40}=$

$=\frac{1}{2}+2+\frac{4}{25}\cdot\frac{125}{40}=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3$.

Ответ: 3.

2. Проценты

Определение. Процентом называется одна сотая часть числа и обозначается 1%.

Например, чтобы найти 24% от числа 60 надо умножить 60 на 0,24, т.е. $60\cdot 0{,}24=14{,}4$. Значит, 24% от 60 составляет 14,4.

Пример 2.1. По плану рабочий должен был изготовить 80 деталей за смену. Оказалось, что к концу смены он выполнил план на 140%. Сколько деталей изготовил рабочий за смену?

Решение. 140% = 1,4. $80\cdot 1{,}4=112$.

Ответ: 112 деталей.

Пример 2.2. За смену рабочий должен изготовить 80 деталей. За полсмены он изготовил 50 деталей. Сколько процентов задания выполнил рабочий за полсмены?

Решение. Составим пропорцию:

$80 \ -100\%$

$50 \ -x\%.$

Тогда $x = \frac{50 \cdot 100\%}{80} = \frac{5 \cdot 25\%}{2} = 62{,}5\%$.

Ответ: 62,5%.

Пример 2.3. При продаже товара на 1386 рублей получено 10% прибыли. Какова себестоимость товара?

Решение. Примем себестоимость товара за 100%. Тогда продажная цена 1386 составляет 110%. Себестоимость равна $\frac{1386}{110} \cdot 100 = 1260$ руб.

Ответ: 1260 руб.

Пример 2.4. На заводе 35% всех рабочих составляют женщины, а остальные – мужчины, которых на заводе на 252 человека больше, чем женщин. Каково общее число рабочих?

Решение. Мужчины составляют 100% – 35% = 65%. Их больше чем женщин на 65% – 35% = 30% и это составляет 252 человека. Следовательно, общее число рабочих равно $\frac{252}{30} \cdot 100 = 840$.

Ответ: 840 рабочих.

3. Алгебраические преобразования

Основные формулы:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

$a^n : a^m = a^{n-m}$;

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Пример 3.1. Упростить выражение:

$$\left(\frac{3}{9-a^2} + \frac{2a-1}{a-3} - \frac{a^2-4}{a^2+6a+9} \cdot \frac{a+3}{a-2}\right) : \frac{a}{a-3}.$$

Решение.

$$\left(\frac{3}{9-a^2}+\frac{2a-1}{a-3}-\frac{a^2-4}{a^2+6a+9}\cdot\frac{a+3}{a-2}\right):\frac{a}{a-3}=$$

$$=\left(\frac{3}{(3-a)(3+a)}-\frac{2a-1}{3-a}-\frac{(a-2)(a+2)}{(a+3)^2}\cdot\frac{a+3}{a-2}\right)\cdot\frac{a-3}{a}=$$

$$=\left(\frac{3}{(3-a)(3+a)}-\frac{2a-1}{3-a}-\frac{a+2}{a+3}\right)\cdot\frac{a-3}{a}=$$

$$=\frac{3-(3+a)(2a-1)-(a+2)(3-a)}{(3-a)(3+a)}\cdot\frac{a-3}{a}=$$

$$=\frac{3-6a+3-2a^2+-3a+a^2-b+2a}{(3-a)(3+a)}\cdot\frac{a-3}{a}=\frac{-6a-a^2}{(3-a)(3+a)}\cdot\frac{a-3}{a}=$$

$$=\frac{-a(a+6)}{(3-a)(3+a)}\cdot\frac{a-3}{a}=\frac{(a+6)(a-3)}{(a-3)(a+3)}=\frac{a+6}{a+3}.$$

Ответ: $\frac{a+6}{a+3}$.

Пример 3.2. Упростить выражение: $\frac{x+1}{x^3+x^2+x}:\frac{1}{x^4-x}-x^2$.

Решение.

$$\frac{x+1}{x^3+x^2+x}:\frac{1}{x^4-x}-x^2=\frac{x+1}{x(x^2+x+1)}\cdot\frac{x(x^3-1)}{1}-x^2=$$

$$=\frac{x+1}{x(x^2+x+1)}\cdot\frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{1}-x^2=$$

$$=(x+1)(x-1)-x^2=x^2-1-x^2=-1.$$

Ответ: –1.

Пример 3.3. Упростить выражение: $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)$.

Решение.

$$\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}}-a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}\right)}-a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}\right)=a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}=2a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}=2\sqrt[4]{ax}.$$

Ответ: $2\sqrt[4]{ax}$.

4. Функция

4.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Определение. Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется *функцией* и записывается $y = f(x), x \in X, y \in Y$ или $f: X \to Y$. Говорят еще, что функция f *отображает* множество X на множество Y. При этом x называется *независимой переменной*, или *аргументом*, а $y = f(x)$ – *зависимой переменной*, или *функцией.*

Определение. Множество X называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$. Множество всех значений, которые принимает функция, называется *областью значений* и обозначается $E(f)$.

4.2. Способы задания функции

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее естественный способ задания функции (задание закона, соответствия) является описание функции на естественном языке. Например, числу поставлен в соответствие его квадрат. Такой способ описания функции называется *словесным.*

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например, $y = x^2$, $y = \begin{cases} x^2 & \text{\textit{при} } x \le 3 \\ 2x+1 & \text{\textit{при} } x > 3 \end{cases}$.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Если множество X содержит конечное число элементов $x_1, x_{2,} ..., x_n$, то можно расположить в таблице соответствующие значения $y_1, y_{2,} ..., y_n$

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Такой способ представления функции называется *табличным*.

Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

Графический способ: задается график функции. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество всех точек (x, y) плоскости *Oxy,* для каждой из которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

4.3. Основные характеристики функции

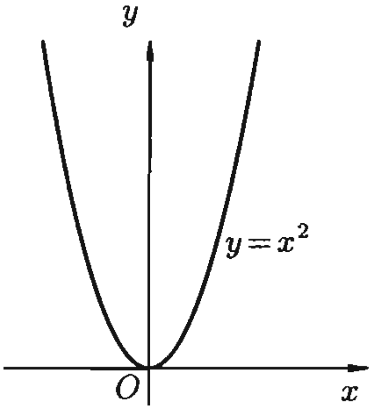
1. Определение. Множество D называется *симметричным относительно точки O* (ноль), если из условия $x \in D$ следует, что $-x \in D$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если ее область определения симметрична и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

Из симметричности области определения и из того, что наряду с точкой (x, y) графику функции принадлежит точка $(-x, y)$, следует, что график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Например, $y = x^2$ (рис. 4.1) функция четная, так как $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2 = f(x)$, а область определения R (множество всех действительных чисел) симметричное.

Рис. 4.1



Определение. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если область ее определения симметрична и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения.

Из симметричности области определения и из того, что вместе с точкой (x, y) графику функции принадлежит точка $(-x, -y)$, следует, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат (т.е. не изменяется при вращении его относительно начала координат на 180°.

Пример, $y = x^3$ (рис. 4.2). Функция нечетная, так как $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x)$ и область определения R симметричная.

Большинство функций не являются ни четными, ни нечетными.

Но любая функция, заданная на симметричном множестве, представима в виде суммы четной и нечетной функций.

Действительно, $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, где $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ – четная функция, $\dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ – нечетная функция.

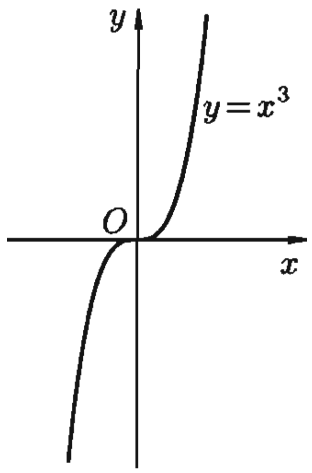


Рис. 4.2

2. Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что для каждого значения аргумента x из области ее значения имеет место равенство $f(x+T) = f(x)$. Число T называют периодом функции.

Из определения следует, что числа $k \cdot T(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ также являются периодами. Наименьший положительный период, если он существует, называется основным периодом.

Замечание 1. Если T – основной период функции $y = f(x)$, то число T/n является основным периодом функции $y = f(n \cdot x)$.

Замечание 2. Если T_1 и T_2 основные периоды функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (T_1 и T_2 целые числа), то наименьшее общее кратное также является периодом (не обязательно основным).

График периодической функции с основным периодом T достаточно построить на любом отрезке длины T, а затем сдвигать эту кривую вправо и влево на отрезки T, $2T$, ...

3. Определение. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* в области своего задания D**,** если существует такое положительное число M, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$.

Например, функция $y = -x^2$ ограничена сверху, так как для всех $x \in D$ выполняется $-x^2 \leq 0$, то есть $M = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число M, что для всех x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) \geq M$.

Например $y = x^2$ ограничена снизу, так как $x^2 \geq 0$ для всех $x \in X$.

Определение. Функция *ограничена*, если она ограничена и сверху, и снизу.

Например, $y = \sin x$ ограничена, так как $|\sin x| \leq 1$ или $-1 \leq \sin x \leq 1$.

4. Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, если для любых двух значений x из этого промежутка $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (см. рис. 4.3).

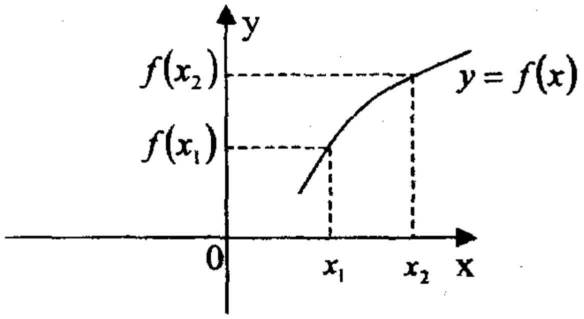


Рис. 4.3.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на некотором промежутке, если для любых двух значений x из этого промежутка $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ (см. рис. 4.4).

Возрастающие и убывающие функции обычно называют *монотонными*.

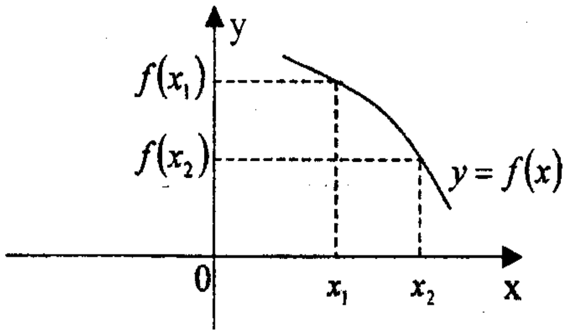


Рис. 4.4.

4.4. Обратная функция

Пусть на некотором множестве X задана функция $y = f(x)$ и Y – область значения данной функции.

Определение. Если для функции $y = f(x)$ можно определить функцию $x = g(y)$, ставящую в соответствие каждому значению функции $y = f(x)$ значение ее аргумента x, то функция $y = g(x)$ называется *обратной функцией* к $y = f(x)$ и обозначается $y = f^{-1}(x)$.

Возьмем некоторое число $y_0 \in Y$. Тогда найдется такое число x_0 (возможно не единственное), что $y_0 = f(x_0)$. Таким образом, каждому значению $y_0 \in Y$ поставлено в соответствие число x_0 (возможно не единственное). Если такое число x_0 – единственное, то говорят, что задана функция $x = g(y)$.

Для существования обратной функции необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f(x)$ осуществляла взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y.

Графики функции $y = f(x)$ и обратной для нее функции $x = g(y)$ совпадают, только аргумент обратной функции рассматривается на оси Oy.

Но если, следуя нашим привычкам, аргумент обозначить буквой x и откладывать его на оси Ox, то есть вместо $x = g(y)$ писать $y = g(x)$, то график функции $y = g(x)$ отличается от графика функции $y = f(x)$.Легко показать, что графики функции $y = f(x)$ и обратной к ней функции $y = g(x)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (см. рис. 4.5).

Заметим, что и свойства прямой, и обратной функций связаны между собой.

1. Область определения X функции $y = f(x)$ является областью значений функции $y = g(x)$.

2. Область значения Y функции $y = f(x)$ является областью определения функции $y = g(x)$.

3. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то функция $y = g(x)$ возрастает (убывает).

4. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$.

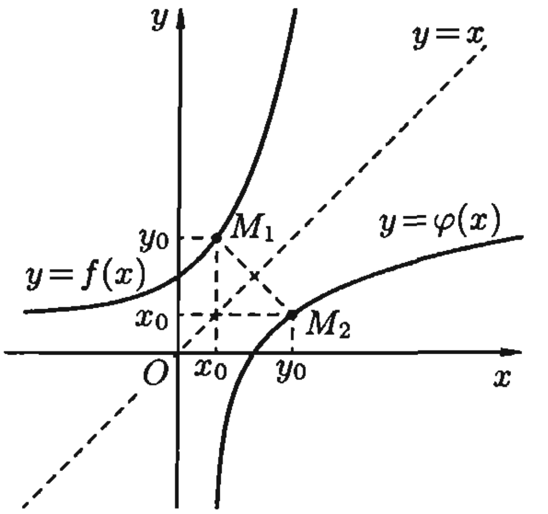


Рис. 4.5.

4.5. Сложная функция

Определение. Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(x))$, которая называется *сложной функцией* от x (или *суперпозицией* заданных функций, или *функцией от функции).*

Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

Например, функция $y = \sin 2x$ есть суперпозиция двух функций $y = \sin u$ и $u = 2x$. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

4.6. Основные элементарные функции и их графики

Основные элементарные функции.

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

2. Показательная функция $y = a^{x}$, $a > 0, a \neq 1$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_{a} x$, $a > 0, a \neq 1$.

4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

1. *Степенная функция* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

Рассмотрим случай $\alpha = 2k$, $k \in N$. Функция определена на всей числовой оси. Функция четная, так как $(-x)^{2k} = x^{2k}$. Функция не является периодической. На интервале $(-\infty; 0)$ функция убывает, на интервале $(0; +\infty)$ функция возрастает. Функция ограничена снизу.

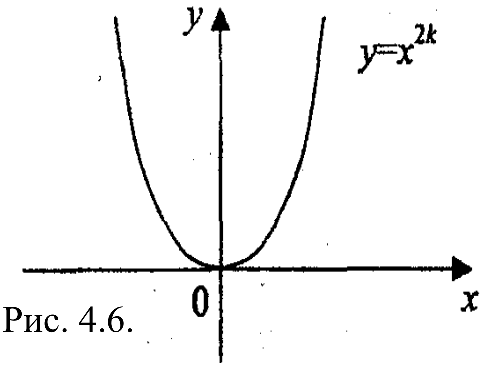


Рис. 4.6.

Случай $\alpha = 2k + 1$, $k \in N$, $y = x^{2k+1}$. Функция определена всюду. Функция нечетная. Функция не является периодической. Возрастает на всей числовой оси. Функция не ограничена.

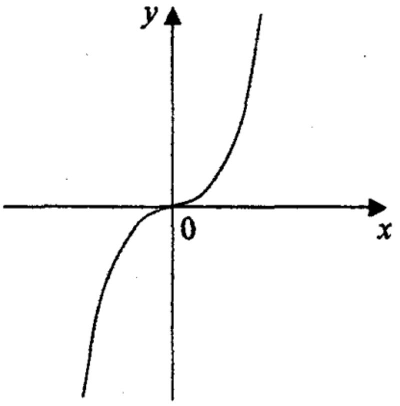


Рис. 4.7.

Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, представлены на рис. 4.8.

2. *Показательная функция* $y = a^{x}$, $a > 0, a \neq 1$.

Определение. Функция, определяемая равенством $y = a^{x}$, где $a > 0, a \neq 1$ называется *показательной*.

Свойства показательной функции непосредственно вытекают из свойств степени.

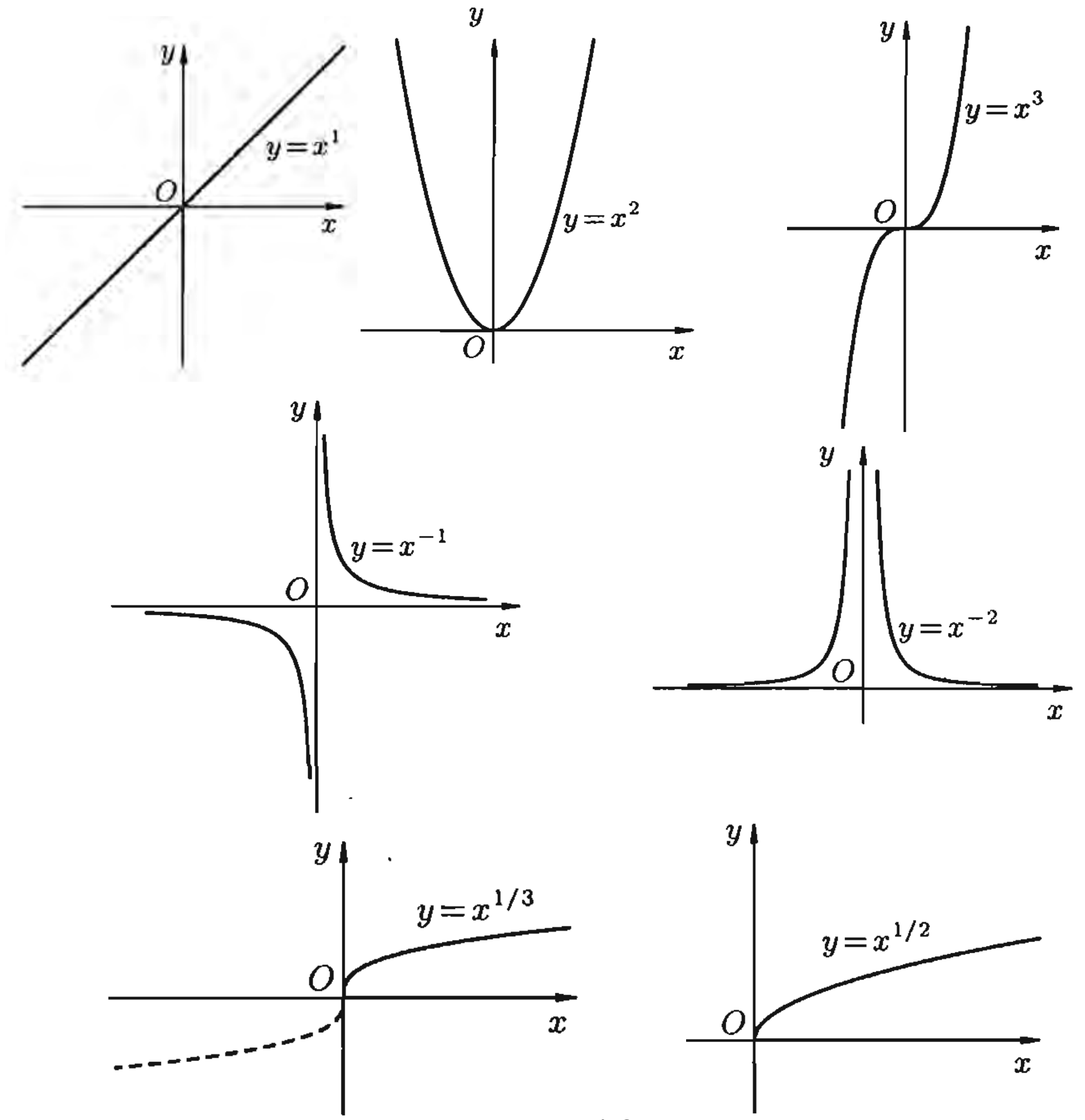


Рис. 4.8.

Показательная функция определена на всей числовой оси, то есть на интервале $(-\infty;+\infty)$. $a^0=1$ при любом основании. При $a>1$, $a^x>1$ для $x>0$ и $a^x<1$ для $x<0$. При $0<a<1$, $a^x<1$ для $x>0$ и $a^x>1$для $x<0$.

Область изменения (значений) функции $y=a^x$ является множество положительных чисел, то есть интервал $(0;\infty)$. Функция монотонна. Если $a>1$, то a^x возрастающая. Если $0<a<1$, то a^x убывающая.

Используя вышеперечисленные свойства, получаем график функции $y=a^x$ (см. рис. 4.9).

3. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$, $a>0, a\neq 1$.

Определение. Функция, обратная показательной функции $y=a^x$, называется *логарифмической* функцией и обозначается $y=\log_a x$.

Свойства логарифмической функции следуют из свойств показательной функции.

Областью определения является множество положительных чисел, то есть $(0;\infty)$. Областью значений является множество действительных чисел, то есть $(-\infty;+\infty)$. $\log_a 1 = 0$ при любом a. Функция $y = \log_a x$ монотонна. При $a > 1$ функция возрастает. При $0 < a < 1$ функция убывает. Если $a > 1$, то $\log_a x > 0$ при $x > 1$ и $\log_a x < 0$ при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то $\log_a x < 0$ при $x > 1$ и $\log_a x > 0$ при $0 < x < 1$.

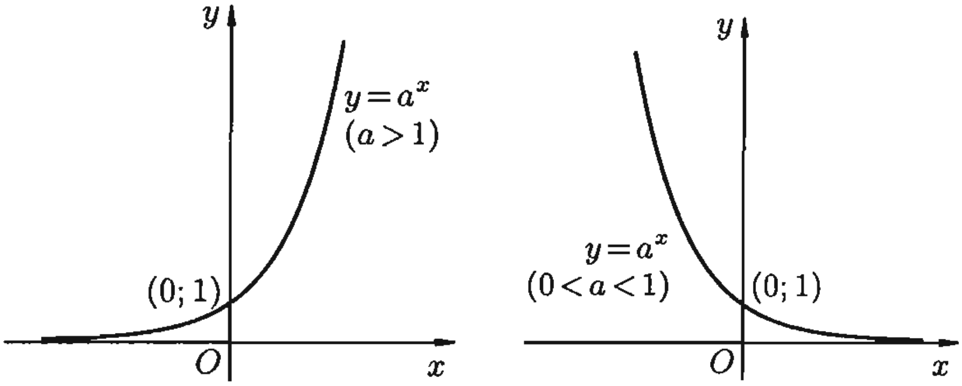


Рис. 4.9.

Графики логарифмических функций, соответствующие различным основаниям, показаны на рис. 4.10.

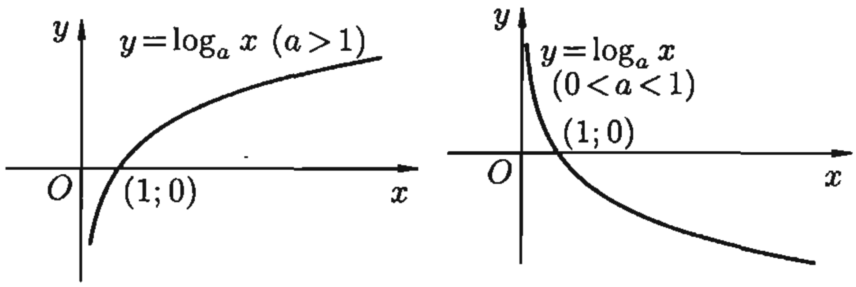


Рис. 4.10.

4. *Тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

Функция $y = \sin x$ (см. рис. 4.11) определена на всей числовой оси, то есть на интервале $(-\infty;+\infty)$. Областью значений является множество $[-1;1]$ Функция нечетная. Возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$. Периодическая, наименьший положительный период $T = 2\pi$.

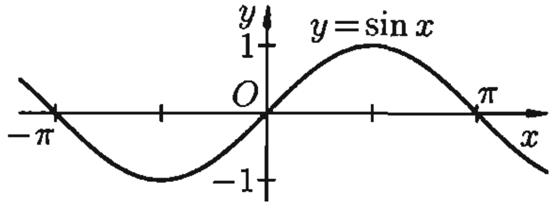


Рис. 4.11.

Функция $y = \cos x$ (см. рис. 4.12) определена на всей числовой оси, то есть на интервале $(-\infty;+\infty)$. Областью значений является множество $[-1;1]$ Функция четная. Возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, убывает при

$x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$. Периодическая, наименьший положительный период $T = 2\pi$.

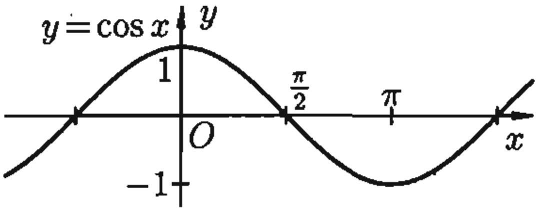


Рис. 4.12.

Функция $y = tgx$ (рис. 4.13). Область определения $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. Областью значений является множество $(-\infty; +\infty)$. Функция нечетная. Возрастает при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. Периодическая, наименьший положительный период $T = \pi$.

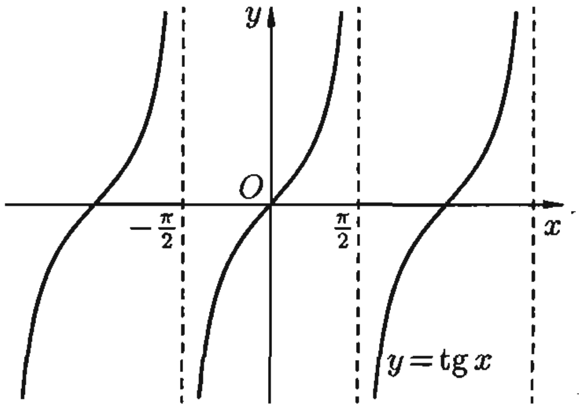


Рис. 4.13.

Функция $y = ctgx$ (рис. 4.15). Область определения $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$. Областью значений является множество $(-\infty; +\infty)$. Функция нечетная. Убывает при $x \in (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$. Периодическая, наименьший положительный период $T = \pi$.

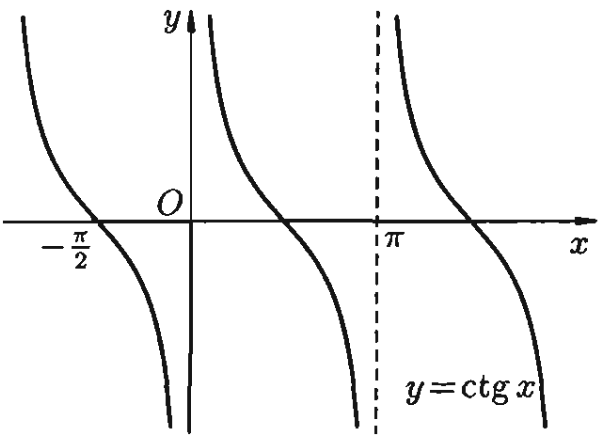


Рис. 4.15.

5. *Обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Функция $y = \arcsin x$ (см. рис. 4.16) определена при $x \in [-1; 1]$. Областью значений является множество $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция нечетная. Возрастает при $x \in [-1; 1]$.

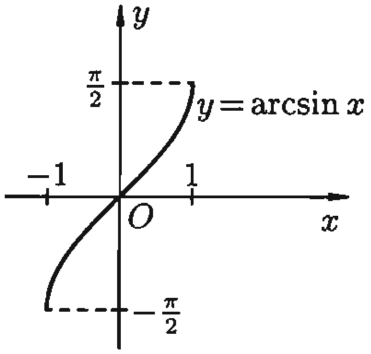


Рис. 4.16.

Функция $y = \arccos x$ (см. рис. 4.17) определена при $x \in [-1; 1]$. Областью значений является множество $[0; \pi]$. Функция ни четная, ни нечетная. Убывает при $x \in [-1; 1]$.

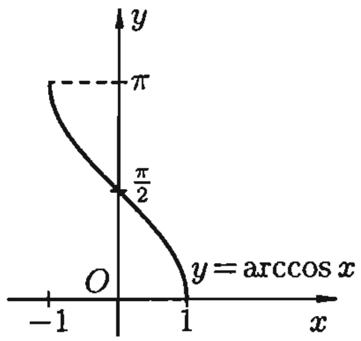


Рис. 4.17.

Функция $y = arctgx$ (см. рис. 4.18) определена на всей числовой оси, то есть на интервале $(-\infty;+\infty)$. Областью значений является множество $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Функция нечетная. Возрастает при $x \in (-\infty;+\infty)$.

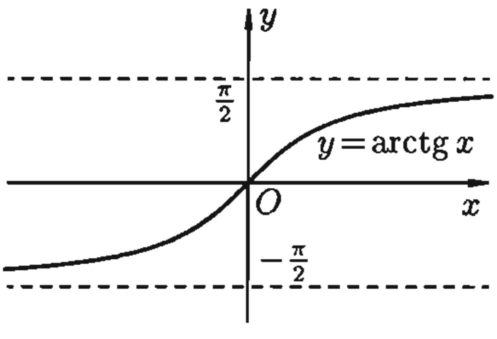


Рис. 4.18.

Функция $y = arcctgx$ (см. рис. 4.20) определена на всей числовой оси, то есть на интервале $(-\infty;+\infty)$. Областью значений является множество $(0;\pi)$. Функция ни четная, ни нечетная. Убывает при $x \in (-\infty;+\infty)$.

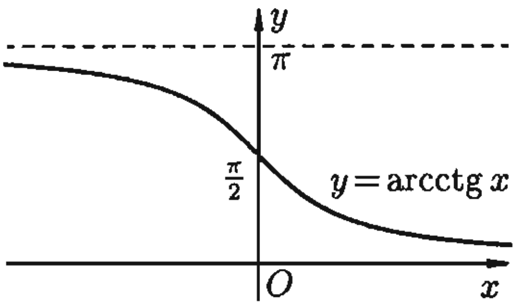


Рис. 4.20.

5. Рациональные уравнения

Линейное уравнение – это уравнение вида $ax = b$. Оно имеет единственное решение $x = \dfrac{b}{a}$ при $a \neq 0$.

Квадратное уравнение – это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Величина $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом этого уравнения. Решение этого уравнения находится по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Из этой формулы видно, что если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два действительных различных корня. Если $D = 0$, то уравнение имеет два одинаковых действительных корня. Если $D < 0$, то уравнение действительных корней не имеет.

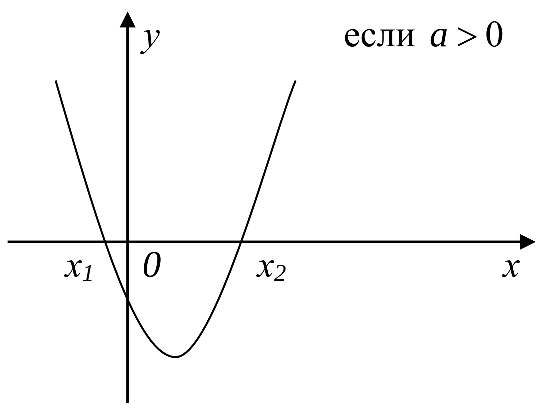
Пример 5.1. Решить уравнение: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

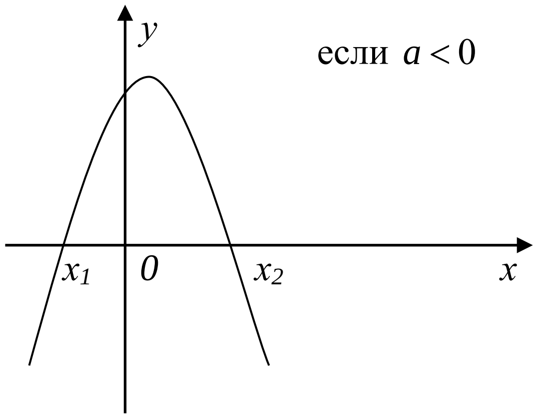
Решение.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2};$$

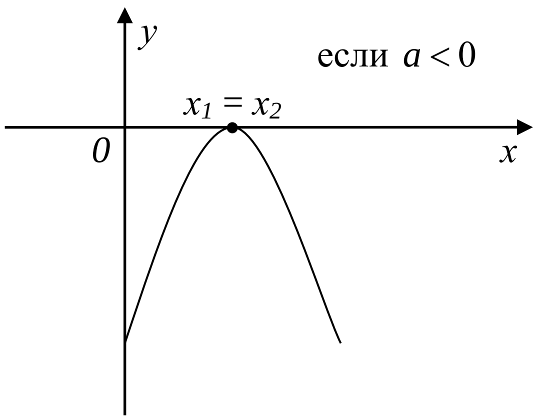
$$x_1 = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-2}{2} = -1.$$

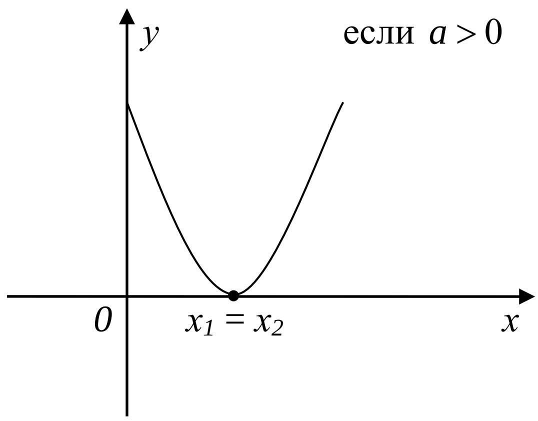
Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения квадратного уравнения. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Если дискриминант квадратного уравнения $D > 0$, то оно имеет два действительных различных корня x_1, x_2 и парабола пересекает ось Ox в двух точках. График параболы будет иметь один из двух видов:



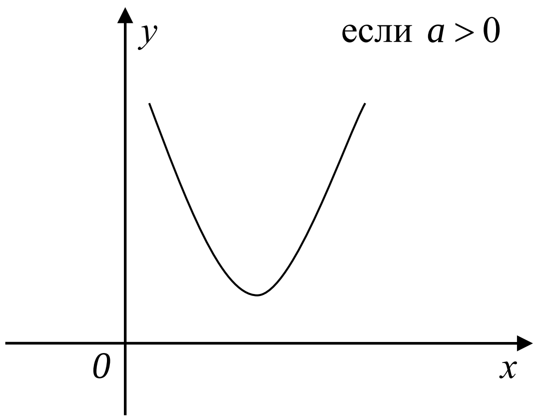


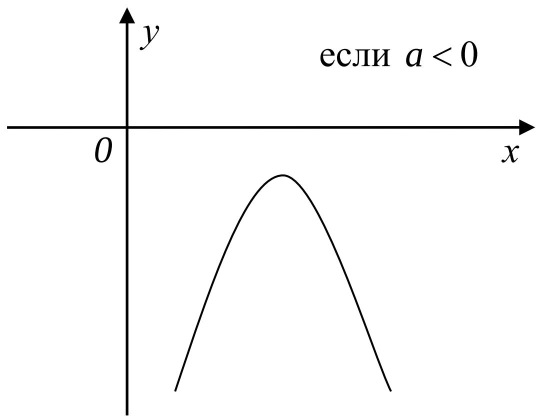
Если $D=0$, то квадратное уравнение имеет два одинаковых корня $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. График параболы будет иметь вид:





Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней и парабола не пересекает ось Ox. График будет иметь вид:





Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется биквадратным. Оно сводится к квадратному уравнению введением новой переменной: $x^2 = z$.

$az^2 + bz + c = 0$.

Пример 5.2. Решить уравнение $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = z$, $z \geq 0$. Имеем $z^2 + z - 6 = 0$;

$z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$; $z_1 = -3$; $z_2 = 2$.

$x^2 = -3$ – уравнение решений не имеет.

$x^2 = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$.

Основными методами решения рациональных уравнений являются разложение на множители и введение новой переменной.

Пример 5.3. Решить уравнение $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$.

Решение. Сгруппируем $(x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = 0$, $x^2(x+2) + 3(x+2) = 0$, $(x+2)(x^2+3) = 0$, $x^2 + 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; x + 2 = 0$; $x = -2$.

Ответ: $x = -2$.

Пример 5.4. Решить уравнение $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1) = 3$.

Решение. Обозначим $x^2 + x = t$. Имеем $(t-1)(t+1) = 3$, $t^2 - 1 = 3$; $t^2 = 4$; $t_{1,2} = \pm 2$.

Вернемся к исходной переменной:

$x^2 + x = 2$,

$x^2 + x - 2 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

$x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

$x^2 + x = -2$,

$x^2 + x + 2 = 0$,

$D = 1 - 8 = -7 < 0$ решений нет.

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Пример 5.5. Решить уравнение $x^3 - x^2 - 9x - 6 = 0$.

Решение. Корнями этого уравнения могут являться множители свободного члена, то есть ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

Подстановкой убеждаемся, что $x = -2$ является корнем уравнения. Следовательно, выражение $x^3 - x^2 - 9x - 6$ имеет множитель $x + 2$. Разделим это выражение на $x + 2$.

$$\begin{array}{l|l}
-\; x^3 - x^2 - 9x - 6 & x + 2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 + 2x^2} & x^2 - 3x - 3 \\
\quad -\; -3x^2 - 9x & \\
\quad \underline{-3x^2 - 6x} & \\
\qquad -\; -3x - 6 & \\
\qquad \underline{-3x - 6} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Тогда $x^3 - x^2 - 9x - 6 = (x+2)(x^2 - 3x - 3)$.

Решим уравнение $x^2 - 3x - 3 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}, \; x_1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}; \;\; x_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2},$$

Ответ: $x=-2$; $x=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$; $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Уравнение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ – называется дробно-рациональным. Корнями этого уравнения являются корни уравнения $P(x)=0$ для которых $Q(x)\neq 0$

Пример 5.6. Решить уравнение $\frac{3x-6}{x^2-x-2}=0$.

Решение. Приравниваем числитель к нулю и решаем уравнение $3x-6=0$. Находим $x=2$. Но при $x=2$ знаменатель обращается в нуль, следовательно, уравнение $\frac{3x-6}{x^2-x-2}=0$ корней не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 5.7. Решить уравнение: $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$.

Решение. Приведем уравнение к общему знаменателю

$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}-\frac{4}{x(2-x)}=0$, $\frac{4x+x(2-x)-8}{2x(2-x)}=0$,

$\frac{x^2-6x+8}{2x(2-x)}=0$, $x^2-6x+8=0$,

$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}$,

$x_1=4$; $x_2=2$.

Но при $x=2$ знаменатель дроби обращается в нуль, следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=4$.

Ответ: $x=4$.

Пример 5.8.а) Решите уравнение $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{8}{(x-1)^2}=7\left(\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}\right)-1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;3]$.

Решение. а) Сделаем замену $t=\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}$,тогда

$$t^2=\left(\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}\right)^2=\frac{(x-1)^2}{16}-2\cdot\frac{x-1}{4}\cdot\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{4}{(x-1)^2}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{8}{(x-1)^2}\right)-1.$$

Таким образом, $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{8}{(x-1)^2}=2t^2+2$. Получим уравнение:

$$2t^2+2=7t-1 \Leftrightarrow 2t^2-7t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}, \\ t=3. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной. Если $t=\frac{1}{2}$,то

$$\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2-8=2(x-1), \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=5. \end{array}\right.$$

Если $t=3$, то $\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}=3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2-8=12(x-1), \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-14x+5=0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7-\sqrt{44}, \\ x=7+\sqrt{44}. \end{array}\right.$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $[-2;3]$.Очевидно, $5 \notin [-2;3], 7+\sqrt{44} \notin [-2;3]$.В силу неравенств $-2<-1<7-\sqrt{44}<3$,из найденных корней уравнения заданному отрезку принадлежат только числа $-1,\ 7-\sqrt{44}$.

Ответ: а) $-1{,}5,\ 7-\sqrt{44},\ 7+\sqrt{44}$,б) $-1,\ 7-\sqrt{44}$.

6. Иррациональные уравнения

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Основные методы решения таких уравнений:

1) Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.
2) Введение новой переменной.

Пример 6.1. Решить уравнение $\sqrt{x-2}=2x-1$.

Решение. Возведем обе части в квадрат. Получим: $x-2=(2x-1)^2$ или $x-2=4x^2-4x+1$, $4x^2-5x+3=0$, $D=b^2-4ac=25-48=-23<0$ – уравнение корней не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 6.2. Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}-x=4$.

Решение. Уединяя корень, получим $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$. Возведем обе части уравнения в квадрат $6-4x-x^2=(x+4)^2$; $6-4x-x^2=x^2+8x+16$,

$$2x^2+12x+10=0 \quad \text{или} \quad x^2+6x+5=0, \quad x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{-6\pm 4}{2},$$

$x_1=-5;\ x_2=-1$.

Проверкой убеждаемся, что $x=-5$ не является корнем уравнения.

Ответ: $x=-1$.

Замечание. При решении иррациональных уравнений с корнями четных степеней проверка обязательна.

Пример 6.3. Решить уравнение $\sqrt[5]{(x-2)^2}-\sqrt[5]{x-2}=2$.

Решение. Положим $\sqrt[5]{(x-2)}=y$. Тогда $\sqrt[5]{(x-2)^2}=y^2$. Получим квадратное уравнение $y^2-y-2=0$, $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm3}{2}$, $y_1=2$; $y_2=-1$.

Возвращаясь к старой переменной x, получим два уравнения:

$\sqrt[5]{(x-2)}=2$, $\sqrt[5]{(x-2)}=-1$. Из первого уравнения, возводя обе части уравнения в пятую степень получаем $x-2=32$, $x=34$, а из второго $x-2=-1$, $x=1$.

Ответ: $x=1$, $x=34$.

Пример 6.4. Решить уравнение $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x-7}=2\sqrt{x}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+5\ge 0 \\ 2x-7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -5 \\ x\ge -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x\ge -\dfrac{7}{2}$.

Возведем левую и правую части уравнения в квадрат:

$$x+5+2\sqrt{(x+5)(2x-7)}+2x-7=4x;\ 2\sqrt{(x+5)(2x-7)}=x+2;$$

$$4(x+5)(2x-7)=x^2+4x+4 \text{ или } 8x^2+12x-140=x^2+4x+4.$$

Приведя подобные, получим

$$7x^2+8x-144=0;\quad D=\sqrt{64+4\cdot7\cdot144}=64,$$

$$x_1=\frac{-8+64}{14}=4;\ x_2=\frac{-8-64}{14}=-\frac{36}{7}.$$

По ОДЗ походит лишь корень x_1

Ответ: $x=4$.

Пример 6.5. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}-7\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}=6$.

Решение. Пусть $\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}=t$, тогда

$$\begin{cases} t-\dfrac{7}{t}=6, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-6t-7=0, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=7 \end{array}\right., \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow t=7.$$

Таким образом, $\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}=7 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x-1}=49 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 1, \\ 2-x=49(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{51}{50}$.

Ответ: $x=\dfrac{51}{50}$.

Пример 6.6.а) Решите уравнение $\sqrt{x^3-4x^2-10x+29}=3-x$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\sqrt{3};\sqrt{30}\right]$.

Решение. а) Решим уравнение: $\sqrt{x^3-4x^2-10x+29}=3-x$,

$$\begin{cases} x^3-4x^2-10x+29=(3-x)^2 \\ 3-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2-10x+29=9-6x+x^2 \\ 3-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2-4x+20=0, \\ x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-5)-4(x-5)=0, \\ x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x^2-4)=0, \\ x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=2, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $-2<-\sqrt{3}$, то отрезку $\left[-\sqrt{3};\sqrt{30}\right]$ принадлежит только число 2.

Ответ: а) -2, 2; б) 2.

7. Показательные уравнения

Показательным уравнением называется уравнение, неизвестное в котором находится в показателе степени. Основные методы решения:

1) Сведение уравнения к одному основанию, то есть к виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, где $a>0$, $a\ne 1$.

2) Введение новой переменной.

Пример 7.1. Решить уравнение: $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$.

Решение. Пользуясь свойствами степеней, получим:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=\left(2^6\right)^{-1},\ 2^{-x^2}\cdot 2^{2x+2}=2^{-6},\ 2^{-x^2+2x+2}=2^{-6}.$$

Это уравнение равносильно уравнению: $-x^2+2x+2=-6$, $x^2-2x-8=0$, $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\dfrac{2\pm 6}{2}$, $x_1=-2$, $x_2=4$.

Ответ: $x_1=-2$, $x_2=4$.

Пример 7.2. Решить уравнение: $4^x+2^{x+1}-24=0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду: $\left(2^x\right)^2+2\cdot 2^x-24=0$. Положим $2^x=y>0$. Получим квадратное уравнение $y^2+2y-24=0$,

$$y_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{-2\pm 10}{2},\ y_1=-5;\ y_2=4.$$

Видим, что $y_1=-5$ не удовлетворяет условию $y>0$. Таким образом, $2^x=4,\ 2^x=2^2$. Следовательно, $x=2$ – корень уравнения.

Ответ: $x=2$.

Пример 7.3. Решить уравнение $9^x+12^x-2\cdot 16^x=0$.

Решение. Запишем это уравнение в виде

$\left(3^x\right)^2+3^x\cdot 4^x-2\cdot\left(4^x\right)^2=0$.

Разделим обе части на $\left(3^x\right)^2$. Получим уравнение

$1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^x-2\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x}=0$.

Введем новую переменную $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x=y>0$. Получим квадратное уравнение

$-2y^2+y+1=0$ или $2y^2-y-1=0$, $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{1\pm 3}{4}$, $y_1=1$; $y_2=-\dfrac{1}{2}$.

Вернемся к старой переменной. $y_1=-\dfrac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $y>0$. Таким образом, $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x=1$. Следовательно, $x=0$ – корень уравнения.

Ответ: $x=0$.

Пример 7.4. Решить уравнение: $\dfrac{4^x-2^{x+2}+3}{2^{\frac{x}{2}}-1}+2^{\frac{x}{2}}+1=0$

Решение. ОДЗ: $2^{\frac{x}{2}}-1\neq 0\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}}\neq 1\Leftrightarrow \dfrac{x}{2}\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$.

С учетом ОДЗ: $4^x-2^{x+2}+3+\left(2^{\frac{x}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{x}{2}}-1\right)=0$;

$$4^x-2^{x+2}+3+2^x-1=0;\ 4^x-3\cdot 2^x+2=0;$$

Пусть $2^x=t$, тогда $t^2-3t+2=0$, $t_1=1; t_2=2$. Возвращаясь к старой переменной: $2^x=0,\ x=0\notin$ ОДЗ; $2^x=2,\ x=1\in$ ОДЗ.

Ответ: $x=1$.

Пример 7.5. а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0\Leftrightarrow 7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-12\cdot 4^{x^2-3x+1}=0.$$

Разделим обе части на $4^{x^2-3x+1}\neq 0$, получим

$$7\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1}+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-12\cdot=0.$$

Сделаем замену $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=t>0$, получим $7t^2+5t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=-\dfrac{12}{7}.\end{array}\right.$

Возвращаемся к старой переменной. Если $t=1$, то

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=1 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Если $t=-\frac{12}{7}$, то $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=-\frac{12}{7}$. Уравнение решений не имеет.

б) Поскольку $2<\sqrt{5}<3$, то $\frac{5}{2}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3$ и $0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2}$.

Значит, отрезку $[-1;2]$принадлежит только $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

8. Логарифмические преобразования и логарифмические уравнения

Основные формулы:

$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$;

$\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$;

$\log_a b^n = n\cdot\log_a b$;

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$;

$a^{\log_a b}=b$;

$\log_a a=1$;

$\log_a 1=0$.

Пример 8.1. Вычислить $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$.

Решение.

$$36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36} = 6^{2\log_6 5}+10\cdot 10^{-\lg 2}-3^{\frac{\log_3 36}{\log_3 9}}=$$

$$= 6^{\log_6 25}+10\cdot 10^{\lg\frac{1}{2}}-3^{\frac{\log_3 36}{2}} = 25+10\cdot\frac{1}{2}-3^{\log_3\sqrt{36}} = 25+5-3^{\log_3 6} =$$

$$=30-6=24.$$

Ответ: 24.

Пример 8.2. Вычислить $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

Решение.

$$\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2} = \left(81^{\frac{1}{4}}\cdot 81^{-\frac{1}{2}\log_9 4}+\left(5^2\right)^{\frac{\log_5 8}{\log_5 125}}\right)\cdot\left(7^2\right)^{\log_7 2} =$$

$$=\left(3\cdot\left(9^2\right)^{-\frac{1}{2}\log_9 4}+\left(5^2\right)^{\frac{\log_5 8}{3}}\right)\cdot 7^{2\log_7 2} = \left(3\cdot 9^{-\log_9 4}+\left(5^2\right)^{\frac{3\log_5 2}{3}}\right)\cdot 7^{\log_7 4} =$$

$$=\left(3\cdot 9^{\log_9\frac{1}{4}}+5^{2\log_5 2}\right)\cdot 4 = \left(3\cdot\frac{1}{4}+5^{\log_5 4}\right)\cdot 4 = \left(3\cdot\frac{1}{4}+4\right)\cdot 4 = 19.$$

Ответ: 19.

Логарифмические уравнения – это уравнения, неизвестная в которых находится под знаком логарифма. Основными методами решения логарифмических уравнений являются сведение логарифмов к одному основанию, то есть к виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где $f(x)>0$ и $g(x)>0$, и введение новой переменной.

При решении логарифмических уравнений или делается проверка или находится область допустимых значений.

Пример 8.3. Решить уравнение $\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6$.

Решение. Найдем область допустимых значений из решения системы неравенств

$$\begin{cases}x+14>0,\\ x+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-14,\\ x>-2\end{cases}\Rightarrow x>-2.$$

Перепишем уравнение в виде: $\log_2(x+14)\cdot(x+2)=\log_2 2^6$. Отсюда $x^2+14x+2x+28=64$, $x^2+16x-36=0$, $x_{1,2}=\dfrac{-16\pm\sqrt{256+144}}{2}=\dfrac{-16\pm 20}{2}$, $x_1=-18$, $x_2=2$. Видим, что $x_1=-18$ является посторонним корнем, так как не входит в ОДЗ.

Ответ: $x=2$.

Пример 8.4. Решить уравнение $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

Решение. Областью допустимых значений является интервал $x>0$. Перейдем к основанию 2.

$\dfrac{\log_2 x}{\log_2 16}+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}+\log_2 x=7$ или $\dfrac{\log_2 x}{4}+\dfrac{\log_2 x}{2}+\log_2 x=7$ или $\log_2 x\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+1\right)=7$ или $\log_2 x=4$, $x=2^4=16$.

Ответ: $x=16$.

Пример 8.5. Решить уравнение $\left(\lg x^2\right)^2-3\lg x-1=0$.

Решение. Область допустимых значений $x>0$. Перепишем уравнение в виде $(2\lg x)^2-3\lg x-1=0$, $4(\lg x)^2-3\lg x-1=0$. Положим $\lg x=t$. Тогда имеем уравнение $4t^2-3t-1=0$, $t_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{8}=\dfrac{3\pm 5}{8}$, $t_1=1$, $t_2=-\dfrac{1}{4}$. Вернемся к старой переменной. Получим два уравнения $\lg x = 1$, откуда $x = 10$ и $\lg x = -\frac{1}{4}$, откуда $x = 10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

Ответ: $x = 10$, $x = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

Пример 8.6. Решить уравнение: $\lg(x-2) - \frac{1}{2}\cdot\lg(3x-6) = 1 - \lg 5$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ 3x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; +\infty)$.

Умножим левую и правую часть выражения на 2, получим:

$$2\lg(x-2) - \lg(3x-6) = 2(\lg 10 - \lg 5) \text{ или}$$

$$\lg\frac{(x-2)^2}{3x-6} = 2\lg 2;\ \frac{(x-2)^2}{3(x-2)} = 4;\ \frac{x-2}{3} - 4 = 0; x = 14.$$

Ответ: $x = 14$.

Пример 8.7. а) Решите уравнение $\log_{x^2-4}(x^3+6) = \log_{x^2-4}(4x^2-x)$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4>0, \\ x^2-4\neq 1, \\ x^3+6>0, \\ 4x^2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty), \\ x\neq\pm\sqrt{5}, \\ x>\sqrt[3]{6}, \\ x\in(-\infty;0)\cup(0{,}25;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5};-2)\cup(2;\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};+\infty).$$

Исходное уравнение равносильно уравнению: $x^3+6 = 4x^2 - x$, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, $(x+1)(x-2)(x-3) = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. С учетом ОДЗ корнем уравнения является $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 8.8. а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2+5) = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$.

Решение. а) Заметим, что уравнение определено при любом x.

Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2+5) = \log_2(8x^4+14) - \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2+5) = \log_2(4x^4+7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+5 = 4x^4+7 \Leftrightarrow 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$$

Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$. Имеем

$$4t^2 - 9t + 2 = 0;\ t_{1,2} = \frac{9\pm\sqrt{81-32}}{8} = \frac{9\pm 7}{8}; t_1 = \frac{1}{4};\ t_2 = 2.$$

Возвращаемся к старой переменной:

$$x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2} \text{ или } x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

б) Поскольку $-\sqrt{2}<-1<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{8}{9}<\sqrt{2}$, то отрезку $\left[-1;\frac{8}{9}\right]$ принадлежат $x=\pm\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm\frac{1}{2}$, б) $x=\pm\frac{1}{2}$.

9. Уравнения с модулем

В этих уравнениях используется определение модуля:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geq 0, \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Пример 9.1. Решить уравнение $|x+2|=6-2x$.

Решение. Найдем нули выражения, стоящего под модулем $x+2=0,\ x=-2$.

а) При $x<-2,\ x+2<0$ и $|x+2|=-(x+2)$. Имеем уравнение $-x-2=6-2x$. Отсюда $x=8$. Это решение не удовлетворяет условию $x<-2$.

б) При $x\geq-2,\ x+2\geq 0$ и $|x+2|=x+2$. Имеем уравнение $x+2=6-2x$. Отсюда $x=\frac{4}{3}>-2$.

Ответ: $x=\frac{4}{3}$.

Пример 9.2. Решить уравнение $|x-2|+|2x-3|=5$.

Решение. Найдем нули подмодульных выражений $x-2=0,\ x=2$ и $2x-3=0,\ x=\frac{3}{2}=1{,}5$. Имеем три интервала: $x<\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\leq x<2,\ x\geq 2$.

а) Пусть $x<\frac{3}{2}$, тогда $x-2<0$ и $|x-2|=-(x-2)$; $2x-3<0$ и $|2x-3|=-(2x-3)$. Получим уравнение: $-x+2-2x+3=5$. Отсюда $x=0$, удовлетворяет условию $x<\frac{3}{2}$, следовательно, является корнем.

б) Пусть $\frac{3}{2}\leq x<2$, тогда $x-2<0$ и $|x-2|=-(x-2)$; $2x-3\geq 0$ и $|2x-3|=2x-3$. Получим уравнение: $-x+2+2x-3=5$. Отсюда $x=6$, не удовлетворяет условию $\frac{3}{2}\leq x<2$, следовательно, корнем не является.

в) Пусть $x \geq 2$, тогда $x-2 \geq 0$ и $|x-2| = x-2$; $2x-3 \geq 0$ и $|2x-3| = 2x-3$. Получим уравнение: $x-2+2x-3=5$. Отсюда $x=\frac{10}{3}$, удовлетворяет условию $x \geq 2$, следовательно, является корнем.

Ответ: $x=0$, $x=\frac{10}{3}$.

10. Тригонометрические преобразования и тригонометрические уравнения

Основные формулы:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$,

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$,

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$,

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,

$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$,

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}},$$

$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$,

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$;

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$0	1	$\sqrt{3}$	0	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-	-

Формулы приведения:

	90º-α	90º+α	180º-α	180º+α	270º-α	270+α
sin	cosα	cosα	sinα	- sinα	- cosα	- cosα
cos	sinα	- sinα	-cosα	-cosα	- sinα	sinα
tg	ctgα	-ctgα	-tgα	tgα	ctgα	-ctgα
ctg	tgα	- tgα	ctgα	ctgα	tgα	- tgα

Простейшие тригонометрические уравнения:

$\sin x = a,\ |a| \le 1,\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$,

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$

$\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\cos x = a,\ |a| \le 1,\ x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$,

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$

$tgx = a,\ x = arctga + \pi k,\ k \in Z$.

$ctgx = a, \quad x = arcctgx + \pi k, \quad k \in Z$

Пример 10.1. Доказать тождество:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+tg\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+ctg\alpha)} = \sin\alpha - \cos\alpha .$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha .$$

Что и требовалось доказать.

Пример 10.2. Упростить выражение:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(-2\alpha)+\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(2\alpha+\pi)}\cdot\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Решение. Учитывая, что

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha,\ \cos(-2\alpha)=\cos 2\alpha,\ \cos^3\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin^3\alpha,$$

$$\sin(2\alpha+\pi)=-\sin 2\alpha,\ \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=tg\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=tg\alpha,$$

получим

$$\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(-2\alpha)+\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(2\alpha+\pi)}\cdot\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha-\sin^3\alpha}{-\sin 2\alpha}\cdot tg\alpha=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\sin^3\alpha}{-2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha(1+\sin\alpha)}{-2\cos^2\alpha}=-1+\frac{tg^2\alpha}{2}(1+\sin\alpha).$$

Ответ: $-1+\frac{tg^2\alpha}{2}(1+\sin\alpha)$.

Основными методами решения тригонометрических уравнений являются разложение на множители и введение новой переменной.

Пример 10.3. Решить уравнение $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x=0$, $\cos x\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$,

1) $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z$.

2) $2\sin x-\sqrt{3}=0$, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k,\ k\in Z$,

$x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\quad x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k,m\in Z$.

Пример 10.4. Решить уравнение:

$1+2\sin x\cdot\sin 3x=4(\sin x+\sin 3x)+\cos 2x$

Решение. Учитывая, что $2\sin 3x\cdot\sin x=\cos 2x-\cos 4x$ и $\sin x+\sin 3x=2\sin 2x\cdot\cos x$, получим:

$1+\cos 2x-\cos 4x=8\sin 2x\cdot\cos x+\cos 2x$,

$1-\cos 4x=8\sin 2x\cdot\cos x$, $2\sin^2 2x-8\sin 2x\cdot\cos x=0$,

$2\sin 2x(\sin 2x-4\cos x)=0$,

1) $\sin 2x=0,\quad 2x=\pi k,\ k\in Z$, $x_1=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

2) $\sin 2x-4\cos x=0,\ 2\sin x\cdot\cos x-4\cos x=0;$

$2\cos x(\sin x-2)=0,$

а) $\cos x=0,\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

б) $\sin x-2=0,\quad \sin x=2$ решения нет, так как $|\sin x|\le 1$. Решения $x_1=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$ можно объединить.

Ответ: $x=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

Пример 10.5. Решить уравнение: $3\sin^2 x+5\cos^2 x=2(1+\sin 2x)$.

Решение. $\sin^2 x+2(\sin^2 x+\cos^2 x)+3\cos^2 x=2+4\sin x\cdot\cos x$.

$\sin^2 x+2+3\cos^2 x=2+4\sin\cdot\cos x,\quad \sin^2 x+3\cos^2 x-4\sin x\cdot\cos x=0$ – это однородное уравнение 2-го порядка. Разделим обе части на $\cos^2 x$.

$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}-4\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}=0;\ tg^2x-4tgx+3=0.$

Положим $tgx=y,\quad y^2-4y+3=0;\quad y_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-14}}{2}=\dfrac{4\pm 2}{2};\quad y_1=3,$ $y_2=1$.

Вернемся к старой переменной

$tgx=3,\ \ x_1=arctg3+\pi n, n\in Z.$

$tgx=1,\ \ x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ \ x=arctg3+\pi n,\ \ k,n\in Z.$

Пример 10.6. Решите уравнение: $3\sin x-2\cos^2 x=0$.

Решение. $3\sin x-2(1-\sin^2 x)=0;\ 3\sin x-2+2\sin^2 x=0.$

Сделаем замену $\sin x=t.$ Придем к квадратному уравнению:

$2t^2+3t-2=0,$

$t_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{-3\pm 5}{4};$

$t_1=-2,\ t_2=\dfrac{1}{2};$

Вернемся к старой переменной. Уравнение $\sin x = -2$ решений не имеет, так как $|\sin| \le 1$. Уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ имеет решение $x = (-1)^K \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$ или $x = (-1)^K \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$,

Ответ: $x = (-1)^K \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

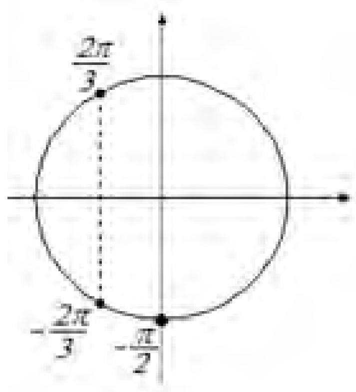
Пример 10.7. Решите уравнение $(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0$.

Решение. ОДЗ: $-\sin x \ge 0$, $\sin x \le 0$.

Исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0, \\ \sqrt{-\sin x} - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi m,\ m \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$



С учетом ОДЗ $\sin x \le 0$, числа $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$ не являются решениями уравнения.

Ответ: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 10.8. а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

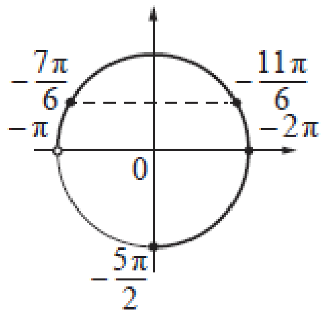
Решение. а) Преобразуем исходное уравнение

$$\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0, \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=(-1)^m \dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in Z, \\ x=\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения , принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$



Получаем числа: $-2\pi; -\dfrac{11\pi}{6}; -\dfrac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $x=(-1)^m \dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in Z,\ x=\pi k,\ k\in Z$,

б) $-2\pi; -\dfrac{11\pi}{6}; -\dfrac{7\pi}{6}$.

11. Рациональные неравенства

Пример 11.1. Решить неравенство: $-x^2-2x+3>0$.

Решение. Умножив обе части неравенства на -1, получим равносильное неравенство $x^2+2x-3<0$.

Сначала решим соответствующее ему квадратное уравнение $x^2+2x-3=0$, $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}$, $x_1=-3$, $x_2=1$.

Квадратичная функция разложиться на множители $(x-1)(x+3)<0$. Данное неравенство эквивалентно двум системам неравенств:

а) $\begin{cases} x-1>0 \\ x+3<0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-1<0 \\ x+3>0 \end{cases}$

Из первой системы имеем $\begin{cases} x>1 \\ x<-3 \end{cases} \Rightarrow$ решений нет.

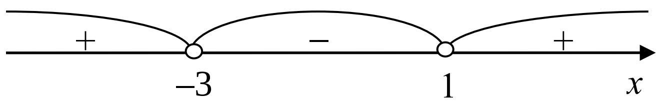
Из второй системы имеем $\begin{cases} x<1 \\ x>-3 \end{cases} \Rightarrow -3<x<1$.

Ответ: $x\in(-3;\ 1)$.

Замечание. При решении рациональных неравенств удобно пользоваться методом интервалов.

Рассмотрим применение метода интервалов на примере решения неравенства $x^2+2x-3<0$.

Нанесем корни уравнения на числовую ось и установим знаки функции $y=x^2+2x-3$ на каждом из интервалов $y(-4)>0$, $y(0)<0$, $y(2)>0$.



Видим, что $x^2+2x-3<0$ при $x\in(-3;\,1)$.

Пример 11.2. Решить неравенство $\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2-x-20\right)>0$.

Решение. Решим уравнение методом интервалов.

Решим уравнение $\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2-x-20\right)=0$.

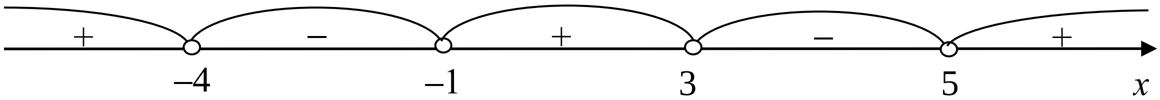
$x^2-2x-3=0$, $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm4}{2}$; $x_1=3$, $x_2=-1$

$x^2-x-20=0$, $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\dfrac{1\pm9}{2}$; $x_1=5$, $x_2=-4$

Получим эквивалентное неравенство:

$(x+1)(x-3)(x+4)(x-5)>0$.

Нанесем корни уравнения на числовую ось и установим знаки функции $y=(x+1)(x-3)(x+4)(x-5)$ на каждом из интервалов.



Видим, что решением неравенства являются $x\in(-\infty;\,-4)\cup(-1;\,3)\cup(5;\,+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;\,-4)\cup(-1;\,3)\cup(5;\,+\infty)$.

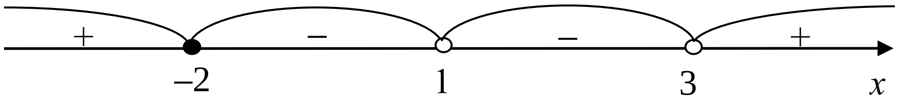
При решении дробно-рациональных неравенств методом интервалов следует найти нули числителя и нули знаменателя, нанести эти точки на числовую ось и установить знаки функции $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на каждом из интервалов и записать ответ.

Пример 11.3. Решить неравенство $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}\le0$.

Решение. Найдем нули числителя и знаменателя $x^2+x-2=0$, $x_1=-2$, $x_2=1$. $x^2-4x+3=0$, $x_1=3$, $x_2=1$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x-1)}$.

Нанесем нули числителя и знаменателя на числовую ось и установим знаки функции $f(x)$ на каждом из интервалов.



Ответ: $x\in[-2;\,1)\cup(1;\,3)$.

12. Рациональные неравенства с модулем

Решение неравенств, содержащих модули, аналогично в большинстве случаев решению уравнений с модулем.

Пример 12.1. Решить неравенство $|x-4|+|x+1|<7$.

Решение. Найдем нули подмодульных выражений:
$x-4=0, x=4, x+1=0, x=-1$

Эти точки разбивают числовую ось на три интервала: $x<-1,\ -1\le x<4,\ x\ge 4$

а) Пусть $x<-1$. Тогда $x-4<0$ и $|x-4|=-(x-4)$, $x+1<0$ и $|x+1|=-(x+1)$.

Имеем неравенство $-x+4-x-1<7,\ -2x<4,\ x>-2$.

Следовательно, $-2<x<-1$.

б) Пусть $-1\le x<4$. Тогда $x-4<0$ и $|x-4|=-(x-4)$, $x+1\ge 0$ и $|x+1|=x+1$. Имеем неравенство $-x+4+x+1<7$, $5<7$ – верно.

Следовательно, $-1\le x<4$.

в) Пусть $x\ge 4$. Тогда $x-4\ge 0$ и $|x-4|=x-4$, $x+1\ge 0$ и $|x+1|=x+1$. Имеем неравенство $x-4+x+1<7,\ 2x<10,\ x<5$.

Следовательно, $4\le x<5$.

Объединяя эти решения, получим $-2<x<5$.

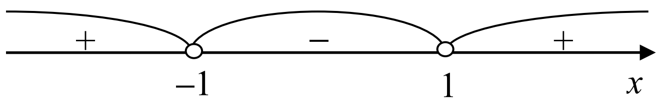
Ответ: $x\in(-2;\ 5)$.

Пример 12.2. Решить неравенство: $2|x^2-1|>x+1$.

Решение. Найдем нули под модульного выражения:

$x^2-1=0$, $x^2=1$, $x=\pm 1$.

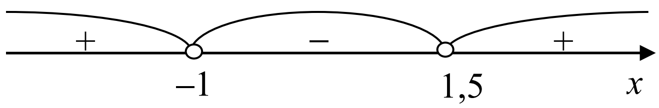
Нанесём эти точки на числовую ось и установим знак выражения x^2-1 на каждом из интервалов



а) Пусть $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. Тогда $|x^2-1|=x^2-1$.

Получим неравенство $2\cdot(x^2-1)>x+1$, $2x^2-2-x-1>0$, $2x^2-x-3>0$

Решим уравнение $2x^2-x-1=0$, $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\dfrac{1\pm 5}{4}$, $x_1=-1$, $x_2=1{,}5$.

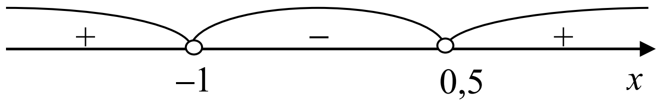


$x\in(-\infty;-1)\cup(1{,}5;+\infty)$. Находим пересечение с $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$, получим $x\in(-\infty;-1)\cup(1{,}5;+\infty)$.

б) Пусть $x\in(-1;1)$. Тогда $|x^2-1|=-(x^2-1)$.

Получим неравенство $-2\left(x^2-1\right)>x+1$, $-2x^2+2-x-1>0$, $-2x^2-x+1>0$, $2x^2+x-1<0$.

Решим уравнение $2x^2+x-1=0$, $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm 3}{4}$, $x_1=-1$, $x_2=0{,}5$.



$x\in(-1;\,0{,}5)$. Находим пересечение с $x\in(-1;1)$, получим $x\in(-1;0{,}5)$.
Объединяем найденные решения $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0{,}5)\cup(1{,}5;+\infty)$.
Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0{,}5)\cup(1{,}5;+\infty)$.

Пример 12.3. Решить неравенство: $x^2+|6x-24|\le 16$.
Решение. Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases}6x-24\ge 0,\\ x^2+6x-24\le 16,\end{cases} \text{ и } \begin{cases}6x-24<0,\\ x^2-6x+24\le 16.\end{cases}$$

Решая первую систему неравенств, получим

$$\begin{cases}x\ge 4,\\ x^2+6x-40\le 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[4;+\infty)\\ x\in[-10;4]\end{cases}.$$

Решением данной системы является $x=4$.
Решая вторую систему неравенств, получим

$$\begin{cases}x<4,\\ x^2-6x+8\le 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;4)\\ x\in[2;\,4]\end{cases}.$$

Решением данной системы является $x\in[2;\,4)$.
Объединяя решения двух систем, получим ответ $x\in[2;\,4]$.
Ответ: $[2;\,4]$**.**

13. Показательные неравенства

При решении показательных неравенств следует помнить, что показательная функция $y=a^x$ возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

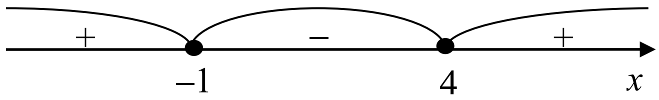
Неравенство $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)>g(x)$ при $a>1$ и равносильно неравенству $f(x)<g(x)$ при $0<a<1$.

Пример 13.1. Решить неравенство $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}}\ge 8^x$.

Решение. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot\frac{4-x^2}{2}} \ge 2^{3x}$; $\left(2^{-1}\right)^{4-x^2} \ge 2^{3x}$; $2^{x^2-4} \ge 2^{3x}$.

Так как $a = 2 > 1$, то это неравенство эквивалентно неравенству $x^2 - 4 \ge 3x$; $x^2 - 3x - 4 \ge 0$.

Решим уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = 4, x_2 = -1$ Нанесём эти точки на числовую ось и установим знак выражения $x^2 - 3x - 4$ на каждом из интервалов.



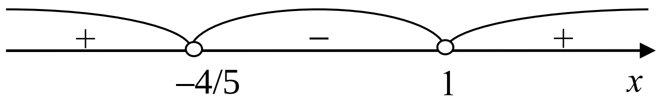
Видим, что $x^2 - 3x - 4 \ge 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Пример 13.2. Решить неравенство $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

Решение. Перепишем его в виде $5\cdot\left(5^x\right)^2 - 5^x - 4 > 0$.

Введем новую переменную $5^x = t > 0$. Получим неравенство $5t^2 - t - 4 > 0$. Решим уравнение $5t^2 - t - 4 = 0$, $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{4}{5}$



$t \in (-\infty; -4/5) \cup (1; +\infty)$. С учетом $t > 0$ получим $t > 1$. Имеем $5^x > 1$; $5^x > 5^0$. Отсюда $x > 0$.

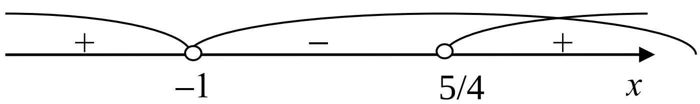
Ответ: $x > 0$.

Пример 13.3. Решить неравенство: $0{,}8^x - 1{,}25^{x+1} > 0{,}25$.

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Запишем неравенство в виде: $\left(\frac{4}{5}\right)^x - \left(\frac{5}{4}\right)^{x+1} > \frac{1}{4}$ или $\left(\frac{4}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{5}\right)^{-x-1} > \frac{1}{4}$, или $\left(\frac{4}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}\cdot\frac{5}{4} > \frac{1}{4}$. Введем обозначение: $t = \left(\frac{4}{5}\right)^x$, $t > 0$, тогда, получим неравенство $t - \frac{5}{4t} - \frac{1}{4} > 0$, или $4t^2 - t - 5 > 0$.

Введем функцию $f(t) = 4t^2 - t - 5$. Найдем нули функции: $t_1 = \frac{5}{4}; t_2 = -1$.



$t \in (-\infty; -1) \cup (5/4; +\infty)$. С учетом $t > 0$ получим $t > \dfrac{5}{4}$. Возвращаясь к старой переменной, получим $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x > \dfrac{5}{4}$ или $x < -1$.

Ответ: $x < -1$.

Пример 13.4. Решить неравенство: $4^x - 2 \cdot 25^x - 10^x > 0$.

Решение. $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0$. Разделим обе части на $5^{2x} \neq 0$, получим неравенство $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2x} - 2 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^x > 0$. Введем обозначение: $t = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$, $t > 0$, тогда

$$\begin{cases} t^2 - t - 2 > 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty) \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 2.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x > 2$ или $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$.

Ответ: $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$.

Пример 13.5. Решить неравенство: $\dfrac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \dfrac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$.

Решение. Введем обозначение: $t = 3^x$, $t > 0$, получим

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \leq t + 5 \Leftrightarrow \frac{6t - 51}{t - 9} \leq t + 5 - \frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} \Leftrightarrow$$

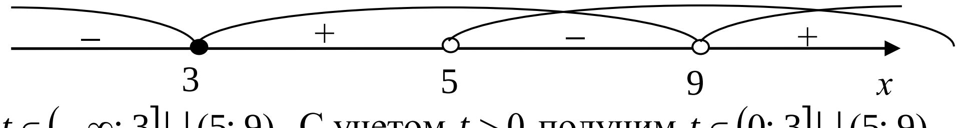
$$\Leftrightarrow \frac{6t - 51}{t - 9} \leq \frac{t^2 - 25 - t^2 + 6t - 4}{t - 5} \Leftrightarrow \frac{6t - 51}{t - 9} \leq \frac{6t - 29}{t - 5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6t - 51}{t - 9} - \frac{6t - 29}{t - 5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(6t - 51)(t - 5) - (6t - 29)(t - 9)}{(t - 9)(t - 5)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t - 6}{(t - 9)(t - 5)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t - 3}{(t - 9)(t - 5)} \leq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{t - 3}{(t - 9)(t - 5)} = 0 \Leftrightarrow t = 3, t \neq 9, t \neq 5$$



Откуда $t \in (-\infty; 3] \cup (5; 9)$. С учетом $t > 0$ получим $t \in (0; 3] \cup (5; 9)$.

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 3^x \leq 3 \\ 5 < 3^x < 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ \log_3 5 < x < \log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ \log_3 5 < x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$.

14. Логарифмические неравенства

При решении логарифмических неравенств следует также получить, что функция $y = \log_a x$ возрастет при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

Неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$ при $a > 1$ и системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ при $0 < a < 1$.

Пример 14.1. Решить неравенство $\lg(x-1) + \lg(x+1) \le 3\lg 2 + \lg(x-2)$.

Решение. Найдём область допустимых значений из решения системы неравенств:

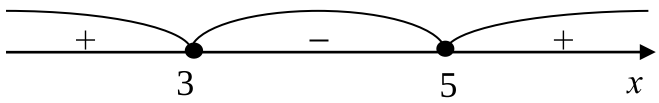
$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-1 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x>2.$$

Используя свойства логарифмов, получим.

$\lg(x-1)(x+1) \le \lg 8(x-2)$, $\lg(x^2-1) \le \lg 8(x-2)$

Это неравенство равносильно неравенству $(x^2-1) \le 8(x-2)$. Решим это неравенство. $x^2 - 1 \le 8x - 16$, $x^2 - 8x + 15 \le 0$, $x^2 - 8x + 15 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2},\ x_1 = 5,\ x_2 = 3.$$



$x \in [3;\ 5]$.

Ответ: $x \in [3;\ 5]$.

Пример 14.2. Решить неравенство $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$.

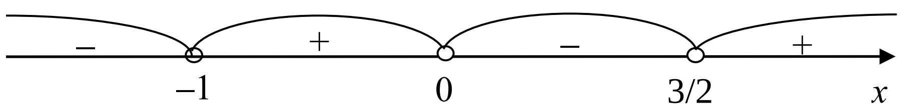
Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1; +\infty)$.

Перейдём к логарифму по основанию 5:

$$2\log_5 x - \frac{\log_5 125}{\log_5 x} < 1;\ 2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} < 1.$$

Положим $\log_5 x = y$. Имеем $2y - \dfrac{3}{y} - 1 < 0$, $\dfrac{2y^2 - y - 3}{y} < 0$, решим это неравенство методом интервалов. Найдём нули числителя и знаменателя,

$$2y^2 - y - 3 = 0,\ y_1 = \frac{3}{2},\ y_2 = -1,\ y \ne 0.$$



$y \in (-\infty; -1) \cup (0; 3/2)$.

Вернемся к старой переменной:

$y < -1 \Rightarrow \log_5 x < -1$, $\log_5 x < \log_5 5^{-1}$, $x < \dfrac{1}{5}$.

$0 < y < \dfrac{3}{2} \Rightarrow 0 < \log_5 x < \dfrac{3}{2}$, $\quad \log_5 1 < \log_5 x < \log_5 5^{\frac{3}{2}}$; $\quad 1 < x < 5^{3/2}$ или $1 < x < \sqrt{125}$. С учетом ОДЗ имеем $x \in \left(0; \dfrac{1}{5}\right) \cup \left(1; \sqrt{125}\right)$.

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{5}\right) \cup \left(1; \sqrt{125}\right)$.

Пример 14.3. Решите неравенство $\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2$.

Решение. Пусть $6x^2 - 5x + 1 = a$, тогда неравенство принимает вид $\log_a 2 > \log_{\sqrt{a}} 2$ или $\log_a 2 > 2\log_a 2$ или $-\log_a 2 > 0$ или $\log_2 a < 0$.

Тогда исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 < 1, \\ 6x^2 - 5x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(6x-5) < 0, \\ (2x-1)(3x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \dfrac{5}{6}\right), \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{6}\right).$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{6}\right)$.

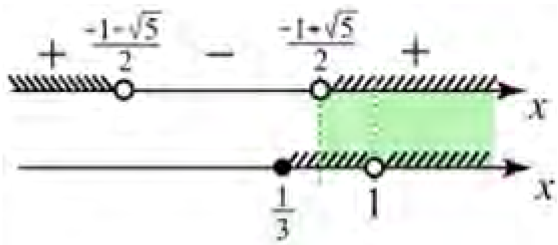
Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{6}\right)$.

Пример 14.4. Решите неравенство $\log_{x^2+x}(x^2 - 2x + 1) \le 1$.

Решение. 1) Если $x^2 + x > 1$ то

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ x^2 - 2x + 1 > 0, \\ x^2 - 2x + 1 \le x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ x \ne 0, \\ 3x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right),\\ x\neq 0,\\ 3x\geq 1\end{cases}$$

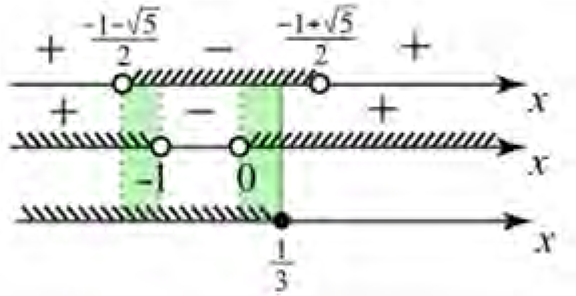


Получим $x\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

2) Если $0<x^2+x<1$ то

$$\begin{cases} x^2+x-1<0,\\ x^2+x>0,\\ x^2-2x+1>0,\\ x^2-2x+1\leq x^2+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+x-1<0,\\ x^2+x>0,\\ x^2-2x+1\leq x^2+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+x-1<0,\\ x(x+1)>0,\\ 3x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\\ x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty),\\ x\leq\dfrac{1}{3}\end{cases}$$



Получим $x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Объединяя найденные промежутки, получаем решение неравенства:

$x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

15. Задачи с параметром

Пример 15.1. Для всех значений параметра a решить уравнение $\dfrac{1}{x-2a}=\dfrac{2}{ax-1}$.

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} ax-1=2x-4a,\\ x-2a\neq 0,\\ ax-1\neq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (a-2)x=1-4a,\\ x\neq 2a,\\ ax\neq 1.\end{cases}$$

1. если $a - 2 = 0, \Rightarrow a = 2$, то уравнение в последней системе имеет вид $0 \cdot x = -7 \Rightarrow x \in \varnothing$.

2. если $a - 2 \neq 0 \ \Rightarrow a \neq 2$, то $x = \dfrac{1-4a}{a-2}$

Найдем значения параметра a, при которых $x = 2a$ или $ax = 1$. Имеем:

$$\left[\begin{aligned} &\frac{1-4a}{a-2} = 2a, \\ &\frac{a(1-4a)}{a-2} = 1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &1-4a = 2a^2 - 4a, \\ &a - 4a^2 = a - 2, \end{aligned}\right. \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{aligned} &a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &a = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right.$$

Таким образом, если $a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то исходное уравнение также не имеет решения.

Ответ: если $a \in \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 2\right\}$, то $x \in \varnothing$; если $a \notin \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 2\right\}$, то $x = \dfrac{1-4a}{a-2}$

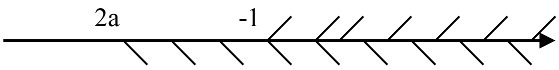
Пример15.2. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{x-2a} + \sqrt{1+x}$

Решение:

Так как, выражение, стоящее под квадратным корнем, должно быть неотрицательным, то областью определения *D(f)* функции будет множество решений системы: $\begin{cases} x - 2a \geq 0, \\ 1 + x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2a \\ x \geq -1 \end{cases}$

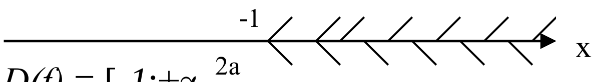
Изобразим решение полученной системы на числовой оси. При этом возможны следующие случаи расположения точек *a* и *-1* относительно друг друга.

1. $2a < -1 \Rightarrow a \leq -\dfrac{1}{2}$, тогда точка $2a$ находится левее точки *-1*



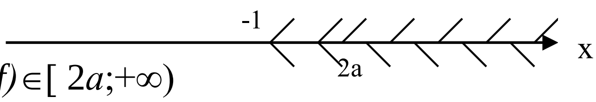
D(f) $= x \in [-1; +\infty)$

2. $2a = -1,\ a = -\dfrac{1}{2}$, тогда точка *-1* совпадает с точкой $2a$



D(f) $= [-1; +\propto,$

3. $2a > -1 \Rightarrow a > -\dfrac{1}{2}$, тогда $2a$ находится правее точки *-1*



D(f) $\in [\ 2a; +\infty)$

Ответ: если $a > -\frac{1}{2}$, то $D(f) \in [2a; +\infty)$

если $a \le -\frac{1}{2}$, то $D(f) \in [-1; +\infty)$

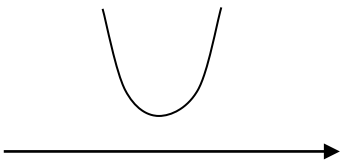
Пример 15.3. Для всех значений параметра a решить неравенство $ax^2 - \sqrt{a-2}x + 1 \le 0$

Решение:

1. если $a + 2 < 0 \Rightarrow a < -2$, то $x \in \varnothing$
2. если $a = 0$, то $-\sqrt{2}x + 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

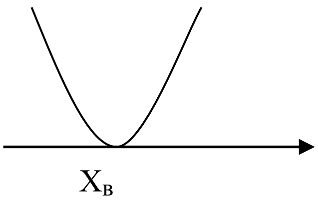
При $a \ne 0$ и ($a \ge -2$) неравенство является квадратным. Найдем дискриминант $D = (\sqrt{a+2})^2 - 4a = 2 - 3a$.

Проведем исследование неравенства, опираясь на схематическое изображение графика квадратичной функции, записанной в левой части неравенства.



3. $\begin{cases} a > 0, \\ D < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 2-3a < 0 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{2}{3}$

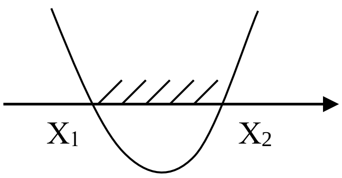
В данном случае $x \in \varnothing$



4. $\begin{cases} a > 0, \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 2-3a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

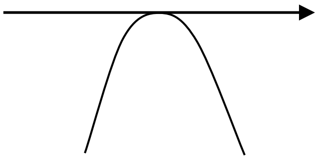
$x = x_в = \frac{\sqrt{a+2}}{2a}$

Подставив вместо параметра a его значение $\frac{2}{3}$, находим $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

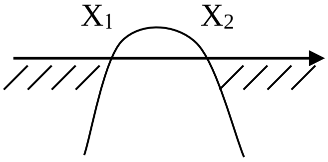


5. $\begin{cases} a > 0, \\ D > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 2-3a > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < \frac{2}{3}$

В данном случае $x \in [x_1; x_2]$, где $x_1 = \frac{\sqrt{a+2} - \sqrt{2-3a}}{2a}$, $\quad x_2 = \frac{\sqrt{a+2} + \sqrt{2-3a}}{2a}$



6. $\begin{cases} a < 0, \\ a \ge -2, \\ D \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le a \le 0, \\ 2-3a \le 0 \end{cases} \Rightarrow$ a$\in\varnothing$



7. $\begin{cases} -2 \le a < 0, \\ D > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le f, 0, \\ 2-3a > 0 \end{cases} \Rightarrow$ -2 $\le$ a <0.

В данном случае $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; -\infty)$, где

$$x_1 = \frac{\sqrt{a+2} - \sqrt{2-3a}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{\sqrt{a+2} + \sqrt{2-3a}}{2a}$$

Ответ: если $a < -2$ или $a > \frac{2}{3}$, то $x \in \varnothing$; если $a = 0$, то $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty]$

если $a = \frac{2}{3}$, то $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

если $0 < a < \frac{2}{3}$, то $x \in \left[x_1 = \frac{\sqrt{a+2} - \sqrt{2-3a}}{2a}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{a+2} + \sqrt{2-3a}}{2a}\right]$

если $-2 \le a < 0$,

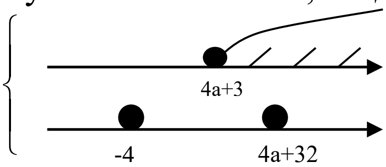
то $x \in \left(-\infty; x_1 = \frac{\sqrt{a+2} - \sqrt{2-3a}}{2a}\right] \cup \left[x_2 = \frac{\sqrt{a+2} + \sqrt{2-3a}}{2a}; +\infty\right)$

Пример 15.4. Найдите все значения параметра a, при котором уравнение $(x+4a)\sqrt{x-4a-32} = 0$ имеет единственное решение.

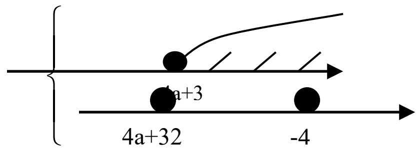
Решение:

$(x+4a)\sqrt{x-4a-32} = 0$ равносильно $\begin{cases} x - 4a - 32 \ge 0, \\ (x+4a)(x-4a-32) = 0 \end{cases}$

Пусть $4a + 32 \ge -4a$, тогда $a \ge -4$ и существует только один корень



Если $a < -4$, то есть два корня



Если $a = -4$, то корни совпадают.

Ответ: при $a \ge -4$, уравнение $(x+4a)\sqrt{x-4a-32} = 0$ имеет единственный корень.

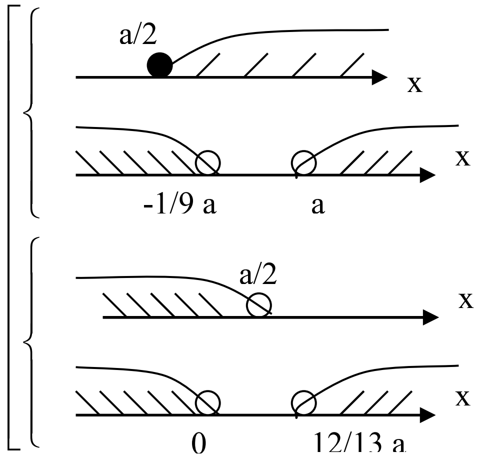
Пример 15.5. Найдите все значения параметра a, при которых любое значение $x \in (3;7)$ не является решением неравенства. $\sqrt{13x^2 - 12ax} \ge 2x - a$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - a \ge 0 \\ 13x^2 - 12ax \ge (2x-a)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - a < 0 \\ 13x^2 - 12ax \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. ; \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{a}{2} \\ 13x^2 - 12ax \ge 4x^2 - 4ax + a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{a}{2} \\ x(13x - 12a) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

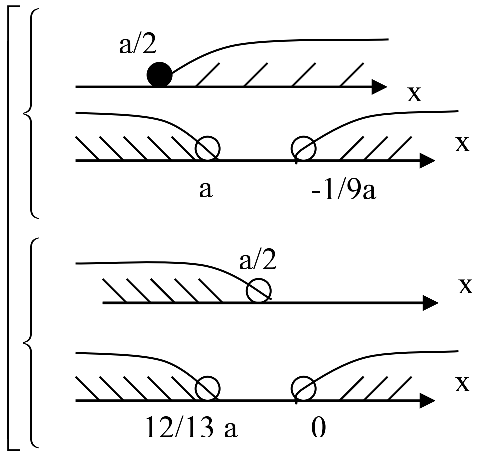
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge \dfrac{a}{2} \\ 9x^2 - 8ax - a^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{a}{2} \\ x(13x - 12a) \ge 0 \end{cases}\end{array}\right. ; \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge \dfrac{a}{2} \\ (x-a)(9x+a) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{a}{2} \\ x(13x - 12a) \ge 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

1) пусть а ≥ 0, тогда:



$\begin{cases} x \ge a \\ x \le 0 \end{cases}$, при а ≥ 0, $x \in (-\infty;0] \cup [a; +\infty)$.

2) пусть $a < 0$, тогда



$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{9}a \\ x \le \dfrac{12}{13}a \end{cases},$$

при $a < 0$, $x \in \left(-\infty; \dfrac{12}{13}\right] \cup \left[-\dfrac{1}{9}a; +\infty\right)$

3) Так как, любой $x \in (3;7)$ не является решением, то

а) для $a \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} a \ge 7 \\ 0 \le 3 \end{cases}; \quad a \ge 7$

б) для $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{9}a \ge 7 \\ \dfrac{12}{13}a \le 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \le -63 \\ a \le 3\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a \le -63$

Ответ: при $a \in (-\infty; -63] \cup [7; +\infty)$ любое значение $x \in (3;7)$ не является решением неравенства $\sqrt{13x^2 - 12ax} \ge 2x - a$.

Пример 15.6. При каких значениях параметра b уравнение $\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=b$ не имеет решений.

Решение:

Умножим числитель и знаменатель дроби из левой части уравнения на 2^x. тогда уравнение примет вид:

$\dfrac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}=b$, при $x \neq 0$, получаем $2^{2x}+1 = b\cdot 2^x - b$, т.е. $2^x \cdot (b - 1) = b+1$.

если $b = 1$, то полученное уравнение не имеет решений;

если $b \neq 1$, то его можно записать в виде $2^{2x} = \dfrac{b+1}{b-1}$; $\dfrac{b+1}{b-1}\le 0$, т.е. при $b \in [-1; 1]$.

Ответ: $b \in [-1; 1]$.

Пример 15.7. При каких значениях параметра a уравнение

$\log_{0,25}\dfrac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2}=a$ имеет решение?

Решение: По определению логарифма $\dfrac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2} = (\dfrac{1}{4})^2$, т.е. $\sqrt{4+\log_4^2 x} = 2\ (\dfrac{1}{4})^2 - 30$. Т.к. $\sqrt{4+\log_4^2 x} \ge 2$ для любых $x > 0$, то

$2\ (\dfrac{1}{4})^2 - 30 \ge 2$, значит $(\dfrac{1}{4})^2 \ge 16$, т.е. $4^{-a} \ge 4^2$. Учитывая, что функция $y = 4^x$ возрастающая, получаем $-a \ge 2$, т.е. $a \le -2$.

Ответ: при $a \le -2$ уравнение $\log_{0,25}\dfrac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2}=a$ имеет решение.

Пример 15.8 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay-ax+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

Решение.

Из второго уравнения системы получаем: $a \ge 0$.

Если $a=0$, то получаем систему

$$\begin{cases}y\text{-}x=0,\\ xy=0,\end{cases} \text{ откуда } x=y=0.$$

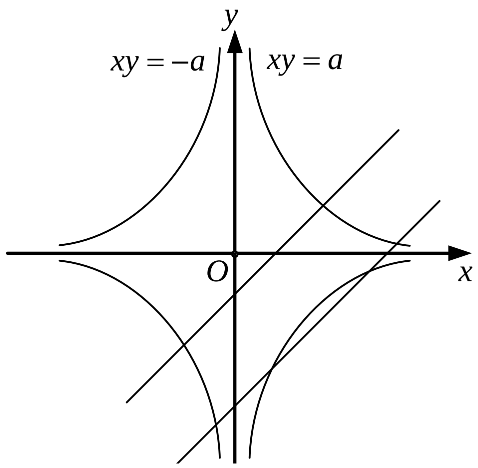
Значит, $a>0$. Получим систему

$$\begin{cases}(a(y-x)+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

откуда $y-x=-\dfrac{2}{a}$ или $y-x=-3a$, $xy=\pm a$.

На координатной плоскости мы получаем две параллельные прямые и две гиперболы.

Если две прямые совпадают, то шесть различных решений невозможно. Поэтому $\frac{2}{a} \neq 3a$, $a \neq \sqrt{\frac{2}{3}}$.



При этом условии гипербола $y = \frac{a}{x}$ пересекает каждую из прямых в двух различных точках. Это даёт четыре различных решения данной системы.

Ещё два решения получаются при пересечении прямых гиперболой $y = -\frac{a}{x}$ в двух различных точках. Для этого нужно, чтобы гипербола дважды пересекала ту прямую, что дальше от начала координат, и не имела общих точек с прямой, что ближе к началу координат. Для этого нужно, чтобы из двух квадратных уравнений

$$x^2 - \frac{2}{a}x + a = 0 \text{ и } x^2 - 3ax + a = 0$$

одно имело ровно два различных корня, а другое не имело корней. Дискриминанты этих уравнений должны быть противоположных знаков. Получаем:

$$\left(\frac{4}{a^2} - 4a\right)\left(9a^2 - 4a\right) < 0.$$

Учитывая, что $a > 0$, приходим к неравенству

$$\left(a^3 - 1\right)\left(9a - 4\right) > 0,$$

откуда $a < \frac{4}{9}$ или $a > 1$.

Ответ: $0 < a < \frac{4}{9}$; $a > 1$.

Пример 15.9 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |a + 1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решение.

Исходная система равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} x^4 + \left(|a+1| - x^2\right)^2 = a^2, \\ y = |a+1| - x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^4 - 2|a+1|x^2 + 2a + 1 = 0, \\ y = |a+1| - x^2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда биквадратное уравнение

$$2x^4 - 2|a+1|x^2 + 2a + 1 = 0$$

имеет ровно четыре различных корня. Это выполняется, когда квадратное уравнение

$$2t^2 - 2|a+1|t + 2a + 1 = 0$$

имеет ровно два положительных корня.

Чтобы полученное квадратное уравнение имело два корня, его дискриминант должен быть положительным:

$$4(a+1)^2 - 8(2a+1) > 0;\ a^2 - 2a - 1 > 0,$$

откуда $a < 1 - \sqrt{2}$ или $a > 1 + \sqrt{2}$.

Чтобы корни полученного квадратного уравнения были одного знака, свободный член этого уравнения должен быть положительным:

$$2a + 1 > 0,$$

откуда $a > -0{,}5$.

Чтобы корни квадратного уравнения были положительными, коэффициент при t должен быть отрицательным, то есть $a \neq -1$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $-0{,}5 < a < 1 - \sqrt{2}$ или $a > 1 + \sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-0{,}5; 1 - \sqrt{2}\right)$; $\left(1 + \sqrt{2}; +\infty\right)$.

Пример 15.10 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5 - 7x} \cdot \ln\left(9x^2 - a^2\right) = \sqrt{5 - 7x} \cdot \ln(3x + a)$$

имеет ровно один корень.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{5 - 7x} \cdot \left(\ln\left(9x^2 - a^2\right) - \ln(3x + a)\right) = 0.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\sqrt{5 - 7x} = 0$ при условии $\begin{cases} 3x\text{-}a > 0, \\ 3x + a > 0. \end{cases}$

Получаем $x = \dfrac{5}{7}$. Условие принимает вид $\begin{cases} \dfrac{15}{7}\text{-}a > 0, \\ \dfrac{15}{7} + a > 0, \end{cases}$ откуда $-\dfrac{15}{7} < a < \dfrac{15}{7}$. То есть в этом случае $x = \dfrac{5}{7}$ при $-\dfrac{15}{7} < a < \dfrac{15}{7}$.

Второй случай: $\ln\left(9x^2-a^2\right)-\ln(3x+a)=0$ при условии $5-7x\ge 0$.

Получаем $\ln\left(9x^2-a^2\right)=\ln(3x+a)$; $\begin{cases}(3x\text{-}a)(3x+a)=3x+a,\\ 3x+a>0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x\text{-}a=1,\\ 3x+a>0;\end{cases}$ откуда $x=\dfrac{a+1}{3}$, $a>-\dfrac{1}{2}$. Условие принимает вид $5-\dfrac{7a+7}{3}\ge 0$, откуда $a\le\dfrac{8}{7}$. То есть в этом случае $x=\dfrac{a+1}{3}$ при $-\dfrac{1}{2}<a\le\dfrac{8}{7}$.

Корни уравнения $x=\dfrac{5}{7}$ и $x=\dfrac{a+1}{3}$ совпадают при $a=\dfrac{8}{7}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень при $-\dfrac{15}{7}<a\le-\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{8}{7}\le a<\dfrac{15}{7}$.

Ответ: $-\dfrac{15}{7}<a\le-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{8}{7}\le a<\dfrac{15}{7}$.

Пример 15.11 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{7}{x}-4\right|=ax-3$$

на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax-3$ и $g(x)=\left|\dfrac{7}{x}-4\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ – неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение не имеет решений на промежутке $(0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0;\dfrac{7}{4}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0;\dfrac{7}{4}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\dfrac{7}{4}\right)\ge g\left(\dfrac{7}{4}\right)$, откуда получаем $a\cdot\dfrac{7}{4}-3\ge 0$, то есть $a\ge\dfrac{12}{7}$.

На промежутке $\left(\dfrac{7}{4};+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-3=4-\dfrac{7}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-7x+7=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 49 - 28a$, поэтому при $a > \frac{7}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{7}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{7}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0 < a < \frac{7}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{7+\sqrt{D}}{2a} > \frac{7}{2a} > 2 > \frac{7}{4}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда $a\left(x_1 - \frac{7}{4}\right)\left(x_2 - \frac{7}{4}\right) = a\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 7\cdot\frac{7}{4} + 7 = \frac{7\cdot(7a-12)}{16} > 0$, то есть $a > \frac{12}{7}$.

Таким образом, уравнение $\left|\frac{7}{x} - 4\right| = ax - 3$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0;+\infty)$:

- нет корней при $a \le 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{12}{4}$ и $a > \frac{7}{4}$;
- два корня при $a = \frac{12}{7}$ и $a = \frac{7}{4}$;
- три корня при $\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$.

Ответ: $\frac{12}{7} < a < \frac{7}{4}$.

Пример 15.12 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3\left|x - a^2\right| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение.

При $x \ge a^2$ $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$, поэтому график функции есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4$.

При $x \le a^2$ $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$, поэтому график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.

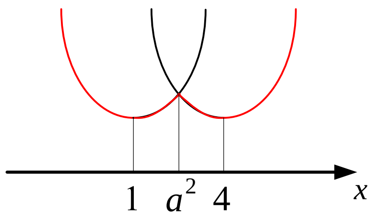


Рис. 1

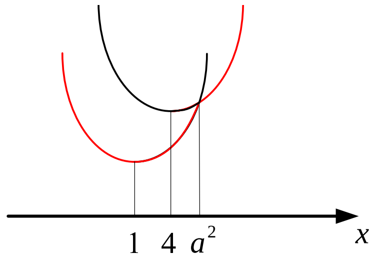


Рис. 2

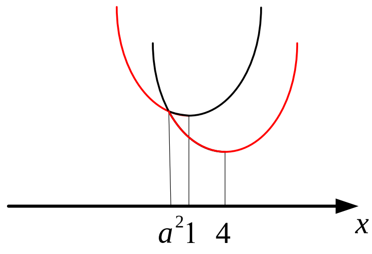


Рис. 3

Обе параболы проходят через точку $\left(a^2; f(a^2)\right)$.

Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1): $1 < a^2 < 4$, откуда $1 < |a| < 2$.

Ответ: $-2 < a < -1$; $1 < a < 2$.

16. Смешанные уравнения и неравенства

Рассмотрим уравнения и неравенства смешанного типа. При решении этих уравнений и неравенств приходится применять комбинации различных приёмов.

Пример 16.1

а) Решить уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$;

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \dfrac{13\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} \Leftrightarrow 5^{\cos x} = 5^{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

б) Отрезку $\left[5\pi, \dfrac{13\pi}{2}\right]$ принадлежат числа $\dfrac{21\pi}{4}$, $\dfrac{25\pi}{4}$.

Отбор корней может быть обоснован любым способом: с помощью неравенства, с помощью единичной окружности и т.п.

Ответ: а) $\left\{x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k : k \in Z\right\}$; б) $\dfrac{21\pi}{4}$, $\dfrac{25\pi}{4}$.

Пример 16.2

а) Решить уравнение $\left(2\cos^2 x + 3\sin x - 3\right) \cdot \log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right) = 0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -3\pi]$

Решение.

а) ОДЗ: $\cos x > 0$.

Преобразуем исходное уравнение

$$\left(2-2\sin^2 x+3\sin x-3\right)\cdot\log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)=0,$$

$$\left(2\sin^2 x-3\sin x+1\right)\cdot\log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)=0.$$

Тогда $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ или $\log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)=0$.

Решая первое уравнение, получаем $\sin x=1$ или $\sin x=\frac{1}{2}$. Учитывая ОДЗ, получаем $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, где $k\in Z$.

Решая второе уравнение, получаем $\sqrt{2}\cos x=1$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, где $k\in Z$.

б) Найдем корни, удовлетворяющие неравенству $-5\pi\le x\le -3\pi$. Получаем:

$$-5\pi\le\frac{\pi}{6}+2\pi k\le -3\pi \text{ или } -5\pi\le-\frac{\pi}{4}+2\pi k\le -3\pi,\ -5\pi\le\frac{\pi}{4}+2\pi k\le -3\pi.$$

Из первого неравенства находим $k=-2$ и при этом $x=\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{23\pi}{6}$.

Из второго неравенства: $k=-2$, а $x=-\frac{\pi}{4}-4\pi=-\frac{17\pi}{4}$.

Из третьего неравенства: $k=-2$, а $x=\frac{\pi}{4}-4\pi=-\frac{15\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k, \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k : k\in Z\right\}$; б) $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{4}$, $-\frac{15\pi}{4}$.

Пример 16.3

а) Решить уравнение $4\cdot 16^{\cos x}-9\cdot 4^{\cos x}+2=0$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

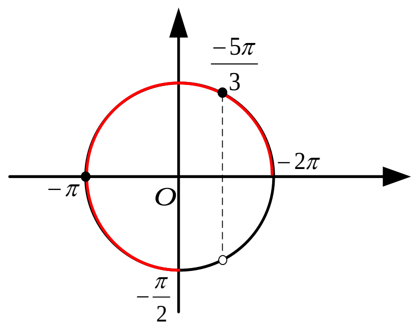
Решение.

а) Пусть $t=4^{\cos x}$, тогда уравнение запишется в виде $4t^2-9t+2=0$, откуда $t=\frac{1}{4}$ или $t=2$.

При $t=\frac{1}{4}$ получаем: $4^{\cos x}=\frac{1}{4}$, $\cos x=-1$, откуда $x=-\pi+2\pi k$, где $k\in Z$.

При $t=2$ получаем: $4^{\cos x}=2$, $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.



Получаем числа: $\frac{-5\pi}{3}$, $-\pi$.

Ответ: а) $-\pi+2\pi k$, $k\in Z$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $\frac{-5\pi}{3}$, $-\pi$.

Пример 16.4

Решить неравенство $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}} ctgx-1}}>1$.

Решение.

ОДЗ: $\log_{\sqrt{3}} ctgx\geq 0$, $\log_{\sqrt{3}} ctgx\geq \log_{\sqrt{3}} 1$. Так как $\sqrt{3}>1$, то $ctgx\geq 1$.

Рассмотрим исходное неравенство как показательное.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}} ctgx-1}}>\left(\frac{3}{7}\right)^{0}.$$

Так как $\frac{3}{7}<1$, то

$$\sqrt{\log_{\sqrt{3}} ctgx}-1<0\Leftrightarrow\log_{\sqrt{3}} ctgx<1\Leftrightarrow\log_{\sqrt{3}} ctgx<\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}\Leftrightarrow ctgx<\sqrt{3}.$$

Тогда $\frac{\pi}{6}+\pi k<x\leq\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$.

Пример 16.5

Решить неравенство $\frac{2^x}{2^x-3}+\frac{2^x+1}{2^x-2}+\frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6}\leq 0$.

Решение.

а) Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид;

$\frac{t}{t-3}+\frac{t+1}{t-2}+\frac{5}{t^2-5t+6}\leq 0$, $\frac{2t^2-4t+2}{t^2-5t+6}\leq 0$, $\frac{2(t-1)^2}{(t-2)(t-3)}\leq 0$,

откуда $t=1$; $2<t<3$.

При $t=1$ получаем: $2^x=1$, откуда $x=0$.

При $2<t<3$ получаем: $2<2^x<3$, откуда $1<x<\log_2 3$.

Ответ: 0; $(1;\log_2 3)$.

Пример 16.6

Решить неравенство $4\log_4^2\left(\sin^3 x\right)+8\log_2\left(\sin x\right)\ge 1$.

Решение.
ОДЗ: $\sin x>0$.
Преобразуем исходное неравенство

$$9\log_2^2\left(\sin x\right)+8\log_2\left(\sin x\right)-1\ge 0.$$

Пусть $t=\log_2\left(\sin x\right)$, тогда $9t^2+8t-1\ge 0$, откуда $t\le -1$ или $t\ge \dfrac{1}{9}$.

Следовательно, $0<\sin x\le 0{,}5$ или $\sin x\ge \sqrt[9]{2}$. Второе неравенство невозможно, а из неравенства $0<\sin x\le 0{,}5$ получаем:

$$2\pi k<x\le \frac{\pi}{6}+2\pi k \text{ или } \frac{5\pi}{6}+2\pi k\le x<\pi+2\pi k, \text{ где } k\in Z.$$

Ответ: $\left(2\pi k;\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $\left[\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

Пример 16.7

Решить неравенство $3^{\log_2 x^2}+2\cdot|x|^{\log_2 9}\le 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

Решение.
ОДЗ: $x^2>0$, $2x+3>0$.

Воспользуемся тождеством $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$. Для доказательства этого тождества достаточно рассмотреть разность логарифмов левой и правой части:

$$\log_b a^{\log_b c}-\log_b c^{\log_b a}=\log_b c\cdot\log_b a-\log_b a\cdot\log_b c=0.$$

Значит, $|x|^{\log_2 9}=|x|^{2\log_2 3}=\left(x^2\right)^{\log_2 3}=3^{\log_2 x^2}$. Неравенство принимает вид

$$3\cdot 3^{\log_2 x^2}\le 3\cdot 3^{\log_2(2x+3)};\ 3^{\log_2 x^2}\le 3^{\log_2(2x+3)};\ \log_2 x^2\le\log_2(2x+3).$$

Так как 2>1, то $x^2-2x-3\le 0$; $-1\le x\le 3$ при условии, что $x\ne 0$.
Ответ: $[-1;0)$; $(0;3]$.

17. Финансовая математика

Пример 17.1. 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн. рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн. рублей.

Решение. По условию, долг перед банком (в млн. рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

1; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0.

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

k; $0{,}6k$; $0{,}4k$; $0{,}3k$; $0{,}2k$; $0{,}1k$.

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$k - 0{,}6$, $0{,}6k - 0{,}4$, $0{,}4k - 0{,}3$, $0{,}3k - 0{,}2$, $0{,}2k - 0{,}1$, $0{,}1k$.

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) - (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) =$$
$$= (k-1)(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) + 1 = 2{,}6(k-1) + 1.$$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн. рублей, значит,

$$2{,}6(k-1) + 1 < 1{,}2,\ 2{,}6\frac{r}{100} + 1 < 1{,}2,\ r < 7\frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 7. Значит, искомое число процентов – 7.

Ответ: 7.

Пример 17.2. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму.

Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 311040 рублей?

Решение. Пусть в кредит планируется взять S рублей, а ежегодный платеж по кредиту будет составлять x рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 20% или в 1,2 раза и уменьшается на x рублей.

Тогда в первый год долг составит: $1{,}2S$, остаток будет равен: $1{,}2S - x$.

После второго года остаток по кредиту составит: $1{,}2(1{,}2S - x) - x$.

После третьего года он будет равен: $1{,}2(1{,}2(1{,}2S - x) - x) - x$.

В конце четвертого года он будет равен: $1{,}2(1{,}2(1{,}2(1{,}2S - x) - x) - x) - x$.

По условию кредит был погашен за 4 года, а это значит, что остаток за четвертый год равен 0, то есть:

$$1{,}2(1{,}2(1{,}2(1{,}2S - x) - x) - x) - x = 0,$$
$$1{,}2^4 S = (1{,}2^3 + 1{,}2^2 + 1{,}2 + 1)x,$$

$$S=\frac{\left(1{,}2^3+1{,}2^2+1{,}2+1\right)x}{1{,}2^4}.$$

По условию общая сумма выплат 311040 рублей, а значит:

$4x=311040$, $x=77760$.

Следовательно,

$$S=\frac{\left(1{,}2^3+1{,}2^2+1{,}2+1\right)77760}{1{,}2^4}=$$

$$=\frac{\left(1{,}728+1{,}44+1{,}2+1\right)77760}{2{,}0736}=201300.$$

Ответ: 201300 рублей.

Пример 17.3. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

Решение. Пусть x тыс. руб. – размер суммы, которую вкладчик дополнительно вносил на счет в конце каждого из первых четырех лет. Согласно условию задачи

$$\left(\left(\left(\left(3900\cdot 1{,}5+x\right)\cdot 1{,}5+x\right)\cdot 1{,}5+x\right)\cdot 1{,}5+x\right)\cdot 1{,}5=\left(1+\frac{725}{100}\right)\cdot 3900.$$

Или, после преобразований,

$$3900\cdot 1{,}5^5+1{,}5x\left(1+1{,}5+1{,}5^2+1{,}5^3\right)=8{,}25\cdot 3900,$$

$$1{,}5x\frac{1{,}5^4-1}{1{,}5-1}=3900\left(8{,}25-1{,}5^5\right),$$

откуда

$x=210$.

Ответ: 210 тыс. руб.

Пример 17.4. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение. Пусть x_1 – количество гектар, засаженных картофелем на первом поле, тогда $10-x_1$ – количество гектар, засаженных свеклой на первом поле. Полученная прибыль с первого поля, равна:

$$P_1=x_1\cdot 400\cdot 10000+\left(10-x_1\right)\cdot 300\cdot 11000=$$

$$=4000000x_1+33000000-3300000x_1=33000000+700000x_1.$$

Отсюда видно, что наибольшая доходность будет достигнута при наибольшем значении $x_1 = 10$ га и прибыль с первого поля составит:

$P_1 = 40000000$ руб.

Обозначим через x_2 – количество гектар, засаженных картофелем на втором поле, а $10 - x_2$ – количество гектар, засаженных свеклой на втором поле. Прибыль со второго поля составит:

$$P_2 = x_2 \cdot 300 \cdot 10000 + (10 - x_2) \cdot 400 \cdot 11000 =$$
$$= 3000000x_2 + 44000000 - 4400000x_2 = 44000000 - 1400000x_2.$$

Наибольшая доходность со второго поля достигается при $x_2 = 0$ и равна 44000000 рублей. Таким образом, максимальная общая доходность с обоих полей, равна:

$$P = P_1 + P_2 = 40000000 + 44000000 = 84000000 \text{ руб.},$$

или 84 млн. рублей.

Ответ: 84 млн. руб.

Пример 17.5. В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг. алюминия или 0,1 кг. никеля. Во второй области для добычи x кг. алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг. никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг. алюминия приходится 1 кг. никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть n – количество рабочих, добывающих алюминий в первой области, m – количество рабочих, добывающих алюминий во второй области, тогда $20 - n$ и $20 - m$ человек добывают никель в первой и во второй областях соответственно.

В первой области за сутки будет добыто $10 \cdot 0{,}1 \cdot n = n$ кг. алюминия и $10 \cdot 0{,}1 \cdot (20 - n) = (20 - n)$ кг. никеля. Во второй области – $\sqrt{10m}$ кг. алюминия и $\sqrt{10 \cdot (20 - m)}$ кг. никеля.

Всего будет добыто $n + \sqrt{10m}$ кг. алюминия и $(20 - n) + \sqrt{200 - 10m}$ кг. никеля.

По условию на 3 кг. алюминия приходится 1 кг. никеля, то есть алюминия нужно добывать в три раза больше, следовательно,

$$n + \sqrt{10m} = 3\left(20 - n + \sqrt{200 - 10m}\right),$$
$$4n = 60 + 3\sqrt{200 - 10m} - \sqrt{10m}. \qquad (*)$$

Так как на 1 кг. никеля приходится 4 кг. сплава, то всему добытому никелю соответствует $4\left[(20 - n) + \sqrt{200 - 10m}\right]$ кг. сплава. Подставим в это выражение (*) и исследуем на максимум функцию:

$$f(m) = 80 - 60 - 3\sqrt{200-10m} + \sqrt{10m} + 4\sqrt{200-10m} =$$
$$= 20 + \sqrt{10m} + \sqrt{200-10m}$$

при натуральных m не больших 20.

Имеем

$$f'(m) = \frac{5}{\sqrt{10m}} - \frac{5}{\sqrt{200-10m}} = \frac{5\left(\sqrt{200-10m} - \sqrt{10m}\right)}{\sqrt{10m(200-10m)}}.$$

Найдем нули производной:

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow \frac{5\left(\sqrt{200-10m} - \sqrt{10m}\right)}{\sqrt{10m(200-10m)}} = 0,$$

$$\sqrt{200-10m} - \sqrt{10m} = 0,\ m \in (0;20),$$

$$200 - 10m = 10m,\ m = 10.$$

Так как при $m \in (0;10)$ $f'(m) > 0$, а при $m \in (10;20)$ $f'(m) < 0$, то в точке $m = 10$ функция $f(m)$ достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на отрезке $[0;20]$. Таким образом,

$$\max_{m \in [0;20]} f(m) = f(10) = 20 + \sqrt{10 \cdot 10} + \sqrt{200 - 10 \cdot 10} = 40.$$

Ответ: 40 кг.

Пример 17.6. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 24 квадратных метра и номера «люкс» площадью 60 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 672 квадратных метра. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 1500 рублей в стуки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Решение. Пусть в отеле будет x стандартных номеров и y номеров «люкс». Тогда общая площадь занимаемых номеров составит $24x + 60y$ и по условию $24x + 60y \le 672$, или $2x + 5y \le 56$ (**). Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна $1500x + 4000y$, или $500(3x + 8y)$. Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $3x + 8y$. Пусть $s = 3x + 8y$, тогда $y = 0{,}125(s - 3x)$, откуда, подставляя в (**), получаем:

$$2x + 0{,}625(s - 3x) \le 56,\ \text{или}\ 5s \le 448 - x.$$

В случае точного равенства $5s = 448 - x$ наибольшему значению суммы s соответствовало бы наименьшее значение величины x. В случае строгого неравенства необходимо найти наименьшее возможное значение x и проверить большие значения, уменьшающие количество пустого пространства.

Наименьшее возможное значение x равно 0. Поскольку $672 = 60 \cdot 11 + 12$ в гостинице можно открыть 11 номеров «люкс» и не открывать стандартные номера. В этом случае номера будут приносить предпринимателю доход 44000 руб. в сутки, и при этом останется 12 кв. м. незанятого пространства. Уменьшим на 1 количество номеров «люкс». Если в гостинице 10 номеров «люкс» и 3 стандартных номера, незанятого пространства не остается: $672-(24\cdot 3+60\cdot 10)=0$. В этом случае доход будет равен $1500\cdot 3+4000\cdot 10=44500$ руб. Дальнейшее уменьшение количества номеров «люкс» в пользу стандартных номеров приведет к уменьшению прибыли.

Ответ: 44500 руб.

18. Текстовые задачи

Задачи на движение

1. Основными компонентами этого типа задач являются:

а) пройденный путь (S); б) скорость (υ); в) время (t)

Зависимость между ними выражается формулами:

$$s=\upsilon\cdot t;\quad \upsilon=\frac{s}{t};\quad t=\frac{s}{\upsilon}. \qquad (1)$$

2. План решения обычно сводится к следующему:

а) выбираем одну из величин, которая по условию задачи является неизвестной, обозначаем ее через x, y, $z\ldots$;

б) устанавливаем, какая из величин является по условию задачи известной;

в) третью (из оставшихся) величину выражаем через неизвестную (x) и известную с помощью одной из формул (1);

г) составляем уравнение на основании условия задачи, в котором указано, как изменилась (увеличилась, уменьшилась и т.д.) третья величина.

3. Если два тела начинают движение одновременно, то до встречи они затрачивают одинаковое время. Аналогично, если одно тело догоняет другое.

4. В задачах на движение по реке используют формулы:

$$\upsilon_{по\,теч.}=\upsilon_{соб.}+\upsilon_{теч.};\quad \upsilon_{против\,теч.}=\upsilon_{соб.}-\upsilon_{теч.};\quad \upsilon_{соб.}=\frac{\upsilon_{потеч.}+\upsilon_{против\,теч.}}{2}.$$

Пример 18.1. *(Движение из одного пункта в другой в одном направлении)*

Первый турист, проехав 1,5 ч. На велосипеде со скоростью $16\frac{км}{ч}$, делает остановку на 1,5 ч., а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Четыре часа спустя после отправки в дорогу первого туриста в догонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью $56\frac{км}{ч}$. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

Решение: Из условия задачи первый турист затратил больше времени, чем второй на 2,5 ч (4-1,5 = 2,5 ч). Пусть x *км..* – расстояние от начала движения до встречи. Тогда $t_1=\frac{x}{16}$ ч. – время, за которое первый турист проезжает расстояние от начала движения до встречи; $t_2 = \dfrac{x}{56}$ ч. – время, за которое второй турист проезжает это расстояние. Известно, что $t_1 - t_2 = 2{,}5$ ч.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{x}{16} - \dfrac{x}{56} = 2{,}5, \quad x = 56$

Ответ: 56 км.

Пример 18.2. *(Движение из одного пункта в другой с остановкой)*

Товарный поезд был задержан в пути на 12 минут, а, затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на $15\dfrac{км}{ч}$. Найти первоначальную скорость поезда.

Решение:

Из условия задачи следует, что если бы поезд после остановки продолжал двигаться с прежней скоростью, то затратил бы на 12 мин. $(12\,мин = \dfrac{1}{5}ч)$ больше, чем предусмотрено расписанием.

Пусть $x\,\dfrac{км}{ч}$ - первоначальная скорость поезда. Тогда $t_1 = \dfrac{60}{x}$ ч. ; $t_2 = \dfrac{60}{x+15}$ ч. Известно, что $t_1 - t_2 = \dfrac{1}{5}$ ч. Составим и решим уравнение: $\dfrac{60}{x} - \dfrac{60}{x+15} = \dfrac{1}{5}$; $x_1 = 60$, $x_2 = -75$.

Ответ: $60\dfrac{км}{ч}$

Пример 18.3. *(Движение из разных пунктов навстречу друг другу)*

В один час навстречу друг другу должны были выйти A из поселка M и B из поселка K. Но A задержался и вышел позже на 6 ч. При встрече выяснилось, что A прошел на 12 км. Меньше, чем B. Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате A пришел в K через 8 ч., а B пришел в M через 9 ч. После встречи. Определите расстояние MK и скорости пешеходов.

Решение:

Пусть $\upsilon_A = x\ \dfrac{км}{ч}$; $S_{KD} = 8x\ \ км.$; $\upsilon_B = y$; $S_{MD} = 9y$ (D - место встречи).

Тогда $t_A = \dfrac{9y}{x}$ ч. – время, которое затратит A на путь из M в D.

$t_B = \dfrac{8x}{y}$ ч. – время, которое затратит B на путь из K в D.

Из условия задачи следует, что $8x-9y=12$. Так как пешеход B вышел раньше, чем A на 6 ч., то $\dfrac{8x}{y}-\dfrac{9y}{x}=6$.

Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} 8x-9y=12, \\ \dfrac{8x}{y}-\dfrac{9y}{x}=6; \end{cases} \quad \begin{cases} 8x-9y=12, \\ 8a-\dfrac{9}{a}=6, \text{ где } \dfrac{x}{y}=a. \end{cases}$$

Решив уравнение относительно a, получим $a_1=\dfrac{3}{2}$, $a_2=-\dfrac{3}{4}$(не удовлетворяет условию задачи).

$$\begin{cases} 8x-9y=12, \\ \dfrac{8x}{y}-\dfrac{9y}{x}6; \end{cases} \quad \begin{cases} 8\cdot\dfrac{3}{2}y-9y=12, \\ x=\dfrac{3}{2}y; \end{cases} \quad \begin{cases} y=4, \\ x=6. \end{cases}$$

Расстояние $MK=8\cdot6+9\cdot4=84$

Ответ: $84\,км$; $6\dfrac{км}{ч}$; $4\dfrac{км}{ч}$.

Пример 18.4. *(Движение по водному пути)*

В 9 ч. самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B. 2 ч. Спустя после прибытия в B эта баржа отправилась в обратный путь и прибыла в A в 19 ч. 20 мин. Того же дня. Предполагая, что средняя скорость течения реки $3\dfrac{км}{ч}$ и собственная скорость баржи постоянна, определить, в котором часу баржа прибыла в пункт B. Расстояние между A и B равно $60\,км$.

Решение: Обозначим собственную скорость баржи через $x\dfrac{км}{ч}$. Тогда время, затраченное на движение по течению реки, составляет $\dfrac{60}{x+3}$ ч., а против течения реки $\dfrac{60}{x-3}$ ч. Всего было затрачено $19\dfrac{1}{3}-9-2=8\dfrac{1}{3}$ ч. Составим и решим уравнение:

$$\frac{60}{x+3}+\frac{60}{x-3}=8\frac{1}{3};\ x_1=15,\ x_2=-0{,}6 \text{ (не удовлетворяет условию задачи).}$$

Время, затраченное на движение против течения реки $\dfrac{60}{15-3}=5$ ч. Следовательно, баржа прибыла в пункт B в 14 ч.

Ответ: в 14 часов

Задачи на совместную работу

1. Основными компонентами этого типа задач являются:

а) работа; б) время; в) производительность труда (работа, выполненная в единицу времени).

2. План решения задачи обычно сводится к следующему:

а) принимаем всю работу, которую необходимо выполнить, за 1;

б) находим производительность труда каждого рабочего в отдельности, т.е. $\frac{1}{t}$, где t – время, за которое указанный рабочий может выполнить всю работу, работая отдельно;

в) находим ту часть всей работы, которую выполняет каждый рабочий отдельно, за то время, которое он работал;

г) составляем уравнение, приравнивая объем всей работы (т.е. 1) к сумме слагаемых, каждое из которых есть часть всей работы, выполненная отдельно каждым из рабочих (если, разумеется, в условии сказано, что при совместной работе всех рабочих выполнен весь объем работы).

3. Следует заметить, что в указанных задачах не всегда сравнивается выполненная работа. Основанием для составления уравнения может служить также указанное в условии соотношение затраченного времени или производительности труда.

Пример 18.4 ***(****Вычисление неизвестного времени работы)*

Две бригады. работая вместе, должны отремонтировать заданный участок шоссейной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала только одна первая бригада, а заканчивала ремонт участка дороги одна вторая бригада, производительность труда которой более высокая, чем первой бригады. В результате ремонт заданного участка дороги продолжался 40 дней, причем первая в свое рабочее время выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько дней был отремонтирован участок дороги каждой бригадой отдельно?

*Решение:*Пусть вся работа может быть выполнена первой бригадой за x дней, а второй – за – у дней.

Принимая всю работу за 1, имеем;

$\frac{1}{x}$ – производительность первой бригады,

$\frac{1}{y}$ – производительность второй бригады,

$\frac{1}{x}\cdot 18$ – часть работы, которую могла выполнить первая бригада, за 18 дней,

$\frac{1}{y}\cdot 18$ – часть работы, которую могла выполнить вторая бригада за 18 дней.

Так как обе бригады, работая совместно, могли выполнить всю работу за 18 дней, то на основании этого имеем $\frac{1}{x}\cdot 18+\frac{1}{y}=1$. Далее из условия задачи следует, что первая бригада выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы, следовательно, она затратила на это $\frac{2}{3}x$ дней, а вторая бригада выполнила $\frac{1}{3}$ всей работы, следовательно, она затратила на это $\frac{1}{3}y$ дней. Так как всего было затрачено 40 дней, то можно составить второе уравнение: $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=40$.

Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\cdot 18+\frac{1}{y}\cdot 18=1 \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=40 \end{cases}$$

$x_1=24$, $x_2=45$, $y_1=72$, $y_2=30$

Так как производительность второй бригады была выше,
чем первой, то условию задачи удовлетворяют $x=45$ и $y=30$.

Ответ: 45 дней, 30 дней.

Пример 18.5. *(Задачи на «бассейн», который одновременно наполняется разными трубами)*

Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же

сначала была открыта только первая труба в течение одной четверти времени. ко ее необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение одной четверти времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить $\frac{11}{24}$ полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Решение: Пусть первая труба наполняет бассейн за x часов, а вторая наполняет бассейн за y часов, тогда производительность каждой трубы будет соответственно $\frac{1}{x}$ *и* $\frac{1}{y}$ в час (примем объем воды в бассейне за 1). Из условия следует, что первая труба наполнила $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}$часть бассейна, вторая труба $\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{4}x$ часть бассейна, а вместе они наполнили $1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$ части бассейна. Отсюда

$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{y}=\frac{13}{24}$. Так как обе трубы при одновременной работе наполняют весь бассейн за 2 ч 24 мин, то $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 2\frac{2}{5}=1$. Составим систему и решим её:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{y}=\frac{13}{24},\\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 2\frac{2}{5}=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{y}{x}\cdot 6+\frac{x}{y}\cdot 6=13,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}.\end{cases}$$

Полагая $\frac{x}{y}=a$, имеем:

$$\begin{cases}6a+\frac{6}{a}=13,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12};\end{cases}\qquad \begin{cases}6a-13a+6=0,\\ 12y+12x=5xy.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a_1=\frac{3}{2},\\ a_2=\frac{2}{3},\end{array}\right.\\ 12y+12x=5xy;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{y}{x}=\frac{3}{2},\\ \frac{y}{x}=\frac{2}{3},\end{array}\right.\\ 12y+12x=5xy;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ y=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x=6,\\ y=4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Будем полагать, что первая труба работала быстрее.

Ответ. 4ч; 6ч.

Задачи на смеси (сплавы)

В задачах этого раздела важно разобраться в самом тексте и научиться разбивать на ряд простейших.

Пример 18.5. *(Задачи, в которых отношение компонентов смеси задано в процентах)*

Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято.

Решение:

Пусть 30%-ного раствора взято x граммов, а 10%-ного раствора взято у граммов. Тогда из условия ясно, что $x+y=600$. Так как первый раствор 30%-ный, что в x граммах этого раствора содержится $0.3x$ граммов кислоты. Аналогично в y граммах 10%-ного раствора содержится $0.1y$ граммов кислоты.

В полученной смеси по условию задачи содержится $600\times 0{,}15=90$ г кислоты, откуда следует $0.3x+0.1y=90$.

Составим систему и решим её:

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 0.3x + 0.1y = 90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900. \end{cases}$$

$x = 150, y = 600 - 150 = 450.$

Ответ: 150 г, 450 г.

Пример 18.6. *(Задачи на разбавление*).

Из бака наполненного спиртом, отлили часть спирта и долили до прежнего объема водой, затем из бака отлили, затем из бака отлили столько же литров смеси, сколько в первый раз отлили спирта, после чего в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта отлили из бака в первый и во второй раз, если в баке содержалось 64 л?

Решение:

Будем полагать, что x литров спирта отлили в первый раз.

Тогда $(64 - x)$ литров спирта осталось в баке.

После того, как бак долили водой, в нем осталось 64 л смеси.

Следовательно, в 1 л смеси содержалось $\frac{64 - x}{64}$ литров спирта.

Так как во второй раз отлили x литров смеси, то спирта отлили во второй раз $\left(\frac{64 - x}{64}\right)$ x литров.

Из условий следует, что из бака всего отлили $64 - 49 = 15$ л спирта.

Составим уравнение и решим его:

$$x + \frac{(64 - x)x}{64} = 15.$$

Откуда $x_1 = 8, x_2 = 120$ (не удовлетворяет условию).

Во второй раз отлили $\frac{(64 - 8) \cdot 8}{64} = 7$.

Ответ:8л, 7л.

Задачи на зависимость между компонентами арифметических действий

Составление уравнений в задачах данного раздела вытекает непосредственно из условия задачи.

Пример 18.6. *(Задачи, где неизвестные являются членами прогрессии)*

Для отправки пересылки четырех бандеролей понадобилось 4 различные почтовые марки на общую сумму 2 р. 80 к. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2.5 раза дороже самой дешевой.

Решение

Пусть x рублей - стоимость самой дешевой марки.

Тогда $2{,}5x$ рублей - стоимость самой дорогой марки.

Стоимость всех четырех по условию есть сумма членов арифметической прогрессии, т.е. $\dfrac{x+2{,}5x}{2}\cdot 4 = 2{,}8,\ \ x = 0.4.$

Из формулы общего члена прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, имеем:

$a_4 = a_1 + 3d,\ \ 2{,}5x = x + 3d,\ \ 1 = 0{,}4 + 3d,\ \ d = 0{,}2.$

$a_2 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6,\ \ a_3 = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8.$

Ответ: 0,4; 0,6; 0,8; 1.

19. Задачи по планиметрии

Основные формулы.

P – периметр многоугольника равен сумме длин всех его сторон.

Длина окружности $C = 2\pi R$, где R – радиус окружности.

Теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$ (c – гипотенуза, a, b – катеты прямоугольного треугольника).

Площади.

Произвольный треугольник: $S = \dfrac{1}{2}a\cdot h$ (a – основание, h – высота); $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p – полупериметр, a, b, c – длины сторон); $S = \dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma$ (a, b – длины сторон, γ – угол между ними).

Прямоугольный треугольник: $S = \dfrac{1}{2}a\cdot b$ (a, b – катеты прямоугольного треугольника).

Равносторонний треугольник: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a – сторона равностороннего треугольника).

Четырехугольники. Прямоугольник: $S = a\cdot b$ (a, b – стороны прямоугольника).

Параллелограмм: $S = a\cdot h$ (a – основание, h – высота параллелограмма).

Ромб: $S = \dfrac{d_1\cdot d_2}{2}$ (d_1, d_2 – диагонали ромба).

Трапеция: $S = \dfrac{a+b}{2}h$ (a, b – стороны трапеции, h – высота трапеции).

Круг: $S = \pi R^2$ (R – радиус круга).

Пример 19.1. Катеты прямоугольного треугольника равны $a = 3$ см и $b = 4$ см. Найти периметр и площадь треугольника.

Решение. Найдем длину гипотенузы $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+16} = 5$ см. Периметр $P = a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12$ см.

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}3\cdot 4=6 \text{ см}^2.$$

Ответ: $P=12$ см, $S=6$ см^2.

Пример 19.2. Периметр параллелограмма равен 122 см. Одна из его сторон больше другой на 25 см. Найти стороны параллелограмма.

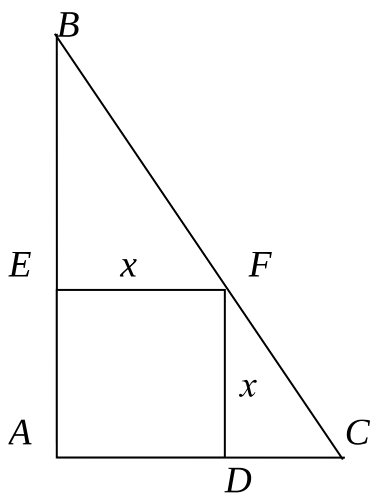
Решение. Пусть x и y – стороны параллелограмма. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}2x+2y=122\\ x-y=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=61\\ x-y=25\end{cases}$$

$$2x=86,\quad x=43,\quad y=18.$$

Ответ: 43, 43, 18, 18.

Пример 19.3. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найти периметр квадрата.

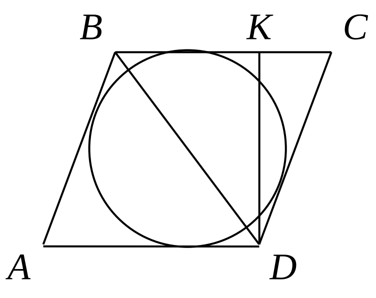


Решение. $AC=a,\ AB=b$. Пусть x – сторона квадрата.

Треугольники FDC и ABC – подобные, $\frac{DC}{DF}=\frac{AC}{AB}$, $DC=a-x$, $\frac{a-x}{x}=\frac{a}{b}$, $b(a-x)=ax$, $ab-bx=ax$, $(a+b)x=ab$, $x=\frac{ab}{a+b}$. Тогда периметр квадрата $P=4x=\frac{4ab}{a+b}$.

Ответ: $P=\frac{4ab}{a+b}$.

Пример 19.4. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиусом $r=2$ см. Найти сторону ромба и его площадь.



Решение. Треугольник BCD – равносторонний и его углы равны 60°. $KD=2r=4$ – высота треугольника BCD. Пусть $BC=CD=BD=x,\ \angle KDC=30^\circ$. Значит $KC=\frac{x}{2}$.

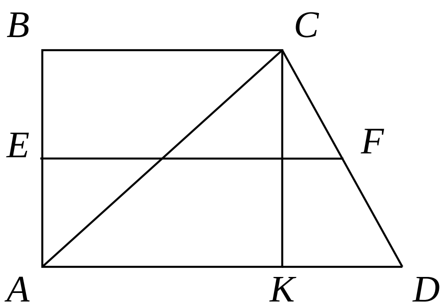
Из ΔKCD: $KD^2=CD^2-KC^2$, $16=x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3}{4}x^2$, $x^2=\frac{64}{3}$, $x=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. Тогда

$$S=BC\cdot KD=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot 4=\frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см^2.

Пример 19.5. Диагональ прямоугольной трапеции равна ее боковой стороне. Найти длину средней линии и периметр трапеции, если ее высота равна 2, а боковая сторона равна 4.

Решение. По условию $KC = 2,\ AC = CD = 4$. По теореме Пифагора



$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} =$
$= 2\sqrt{3}$. $KD = AK = 2\sqrt{3} = BC$. $AD = 4\sqrt{3}$.

Средняя линия

$$EF = \frac{BC + AD}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

.

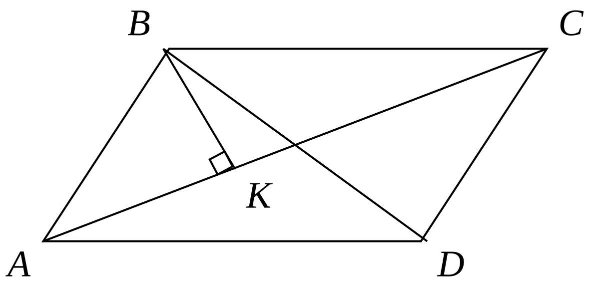
Периметр

$$P = AB + BC + CD + AD = 2 + 2\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} = 6 -$$

.

Ответ: $3\sqrt{3},\ 6(1+\sqrt{3})$.

Пример 19.6. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на его диагональ, дели эту диагональ на отрезки длиной 6 см и 15 см. Разность сторон параллелограмма равна 7 см. Найти стороны параллелограмма и его диагонали.



Решение. $AK = 6$ см, $KC = 15$ см. Пусть $AB = x$, тогда $BC = x + 7$.

$BK^2 = AB^2 - AK^2 = x^2 - 36$,

$BK^2 = BC^2 - KC^2 = (x+7)^2 - 15^2$

,

$x^2 - 36 = (x+7)^2 - 15^2$,

$x^2 - 36 = x^2 + 14x + 49 - 225$,

$14x = 140$, $x = 10$, $AB = CD = 10$ см. $DC = AD = x + 7 = 10 + 7 = 17$ см.

По свойству $2AB^2 + 2BC^2 = BD^2 + AC^2$, получаем

$2 \cdot 100 + 2 \cdot 289 = 441 + AC^2$, $AC^2 = 337$, тогда $AC = \sqrt{337}$ см.

Ответ: 10,10,17,17,21, $\sqrt{337}$.

20. Задачи по стереометрии

Основные формулы.

Поверхности.

Призма: $S_{бок} = Pl$ (P – периметр перпендикулярного сечения, l – боковое ребро).

Правильная пирамида: $S_{бок} = \frac{Pa}{2}$ (P – периметр основания, a – апофема).

Цилиндр: $S_{бок} = 2\pi RH$ (R – радиус основания, H – высота).

Конус: $S_{бок} = \pi Rl$ (R – радиус основания, l – образующая).

Усеченный конус: $S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)l$ (R_1, R_2 – радиусы оснований, l – образующая).

Шар: $S = 4\pi R^2$.

Объемы.

Призма: $V = S \cdot h$ (S – площадь основания, h – высота).

Параллелепипед: $V = S \cdot h$ (S – площадь основания, h – высота).

Пирамида: $V = \dfrac{1}{3} S \cdot h$ (S – площадь основания, h – высота).

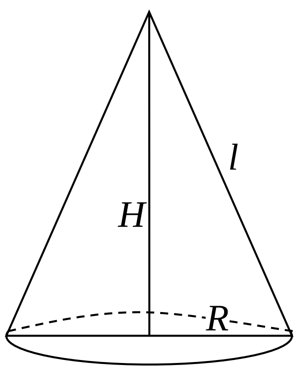
Цилиндр: $V = S \cdot h$ ($S = \pi R^2$ – площадь основания, R – радиус основания, h – высота).

Конус: $V = \dfrac{1}{3} S \cdot h$ ($S = \pi R^2$ – площадь основания, R – радиус основания, h – высота).

Усеченный конус: $V = \dfrac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$ (R_1, R_2 – радиусы оснований, h – высота).

Шар: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ (R – радиус шара).

Пример 20.1. Образующая конуса равна 5 см, площадь его боковой поверхности равна 15π см^2. Найдите объем конуса.

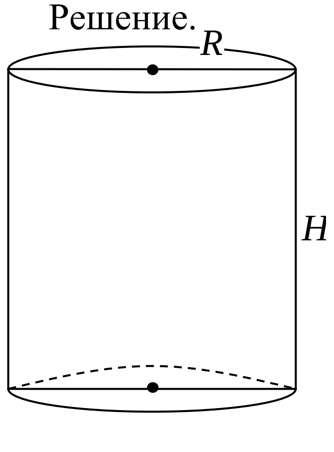


Решение. $S_{бок} = \pi Rl = 5\pi R = 15\pi$ см^2. Тогда $R = 3$ см. По теореме Пифагора: $H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{25 - 9} = = 4$ см. $V = \dfrac{\pi R^2 H}{3} = \dfrac{\pi \cdot 9 \cdot 4}{3} = 12\pi$ см^3.

Ответ: 12π см^3.

Пример 20.2. Высота цилиндра равна 6 см, а площадь его боковой поверхности вдвое меньше площади его полной поверхности. Найдите объем цилиндра.

Решение.



$S_{бок} = 2\pi RH$, $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = 2\pi RH + 2\pi R^2$. По условию $\dfrac{S_{полн}}{S_{бок}} = 2, \dfrac{2\pi RH + 2\pi R^2}{2\pi RH} = 1 + \dfrac{2\pi R^2}{2\pi RH} = 1 + \dfrac{R}{H} = 2$.

Тогда $\dfrac{R}{H} = 1$ или $R = H = 6$ см.

Объем цилиндра найдем по формуле: $V = \pi R^2 H$. $V = \pi 6^2 \cdot 6 = 216$ см^3.

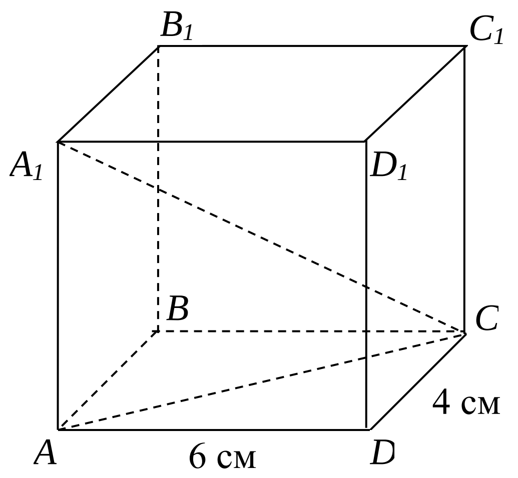
Ответ: 216 см^3.

Пример 20.3. Три одинаковых металлических куба с ребрами по 4 см сплавлены в один куб. Определите площадь поверхности этого куба.

Решение. Объем куба $V = a^3$, где a – длина ребра куба. По условию $a = 4$ см. Тогда $V = 4^3 = 64$ см^3 – объем одного куба. Объем вновь полученного куба будет $V_1 = 3V = 3 \cdot 64 = 204$ см^3. $V_1 = a_1^3 = 204$. Тогда ребро нового куба будет $a_1 = \sqrt[3]{204} = 4\sqrt[3]{3}$ см. Полна поверхность куба $S_{полн} = 6a_1^2 = 216\sqrt[3]{9}$ см.

Ответ: $216\sqrt[3]{9}$ см.

Пример 20.4. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 136 см^2. Стороны основания – 4 см и 6 см. Вычислите диагональ этого параллелепипеда.



Решение.

$S_{полн} = 2S_{ABCD} + 2S_{AA_1B_1B} + 2S_{AA_1D_1D}$.

$S_{ABCD} = 4 \cdot 6 = 24$ см^2,

$S_{AA_1B_1B} = 4 \cdot AA_1$, $S_{AA_1D_1D} = 6 \cdot AA_1$.

Тогда

$136 = 48 + 8AA_1 + 12AA_1 = 48 + 20AA_1$.

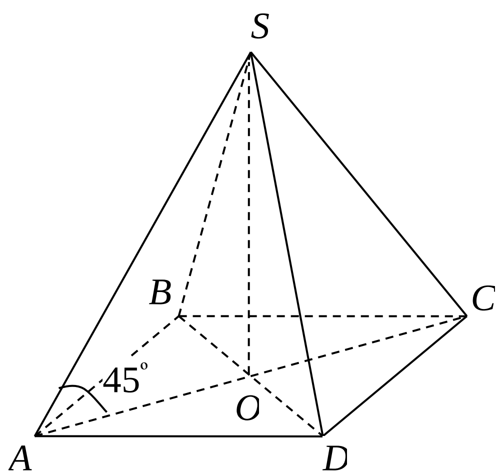
Откуда $AA_1 = \dfrac{22}{5} = 4{,}4$ см. По теореме Пифагора

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$ см.

$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{\dfrac{484}{25} + 52} = \dfrac{2}{5}\sqrt{446}$ см.

Ответ: $\dfrac{2}{5}\sqrt{446}$ см.

Пример 20.5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.



Решение. По условию $ABCD$ – квадрат, $AD = 8$ см.

Диагональ $AC = AD\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ см. $AO = \dfrac{1}{2}AC = 4\sqrt{2}$ см.

Высота $H = SO = AO = 4\sqrt{2}$, так как $\angle SAO = 45^\circ$. Объем пирамиды найдем по формуле: $V = \dfrac{S \cdot H}{3}$, $S = AD^2 = 64$ см^2.

$V = \dfrac{64 \cdot 4\sqrt{2}}{3} = \dfrac{256\sqrt{2}}{3}$ см^3.

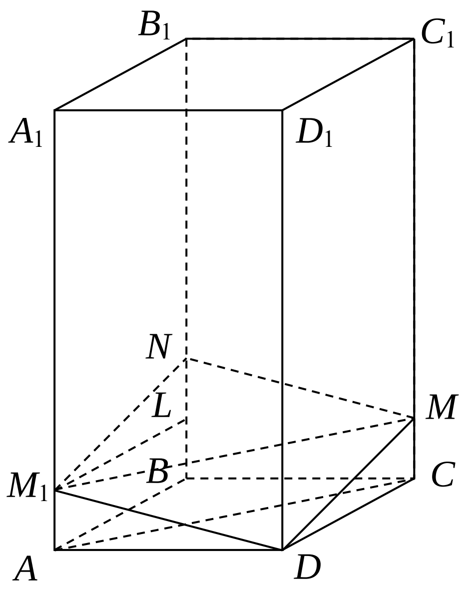
Ответ: $\dfrac{256\sqrt{2}}{3}$ см^3.

Пример 20.6. На ребре CC_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1:6$. Через точки M и D проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро BB_1 в точке N.

а) Докажите, что $B_1N : NB = 5:2$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $AB = 5$, $AA_1 = 14$.

Решение:



а) Построим сечение призмы плоскостью α. Прямая DM лежит в плоскости α. Так как плоскость α параллельна прямой AC, то прямая MM_1, параллельная прямой AC, также лежит в плоскости α. Так как α пересекает параллельные грани CDD_1C_1 и ABB_1A_1 по параллельным прямым, то проводим через точку M_1 прямую, параллельную прямой DM, которая пересечёт ребро BB_1 в точке N. MDM_1N – искомое сечение призмы плоскостью α.

Пусть $CM = x$, тогда $MC_1 = 6x$, $CC_1 = 7x$, $AM_1 = CM = x$. Проведём через точку M_1 прямую M_1L параллельную AB, тогда $BL = AM_1 = x$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_1LN ($\angle M_1LN = 90^\circ$): $M_1L = DC$, $M_1N = DM$, следовательно, $\Delta M_1LN = \Delta DCM$ по катету и гипотенузе и $LN = CM = x$.

Таким образом, $BN = BL + LN = 2x$, $B_1N = B_1B - BN = 7x - 2x = 5x$ и, следовательно, $B_1N : NB = 5:2$. Что и требовалось доказать.

б) Из равенства прямоугольных треугольников M_1LN и MLN (по двум катетам) следует, что $M_1N = NM$. Так как $M_1N \parallel DM$ и $M_1N = DM$, и аналогично, $M_1D \parallel NM$ и $M_1D = NM$, то сечением призмы плоскостью α является ромб M_1NMD. Следовательно, искомая площадь $S = S_{M_1NMD} = \frac{1}{2} M_1M \cdot DN$. Применяя теорему Пифагора, найдём диагонали ромба M_1NMD:

$$M_1M = AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 5\sqrt{2},$$

$$DN = \sqrt{BN^2 + BD^2} = \sqrt{NB^2 + BD^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}B_1B\right)^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{66}.$$

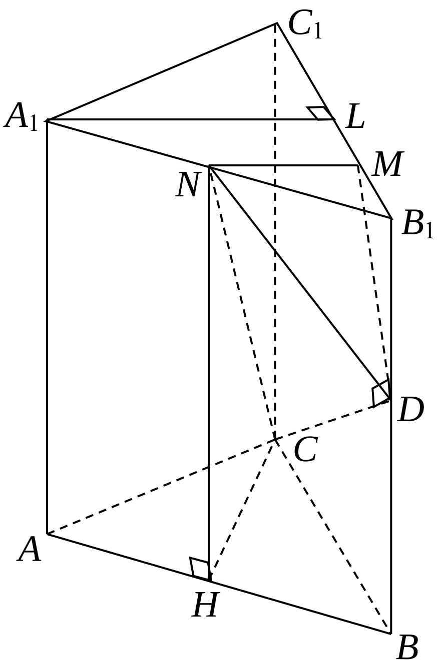
Таким образом, $S = \frac{1}{2} 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{66} = 5\sqrt{33}$.

Ответ: б) $5\sqrt{33}$.

Пример 20.7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны $\sqrt{13}$.

а) Докажите, что прямые CD и DN перпендикулярны, если D и N – середины рёбер BB_1 и B_1A_1 соответственно.

б) Найдите угол между плоскостями CDN и BCC_1.



Решение:

а) Найдём стороны треугольника CDN. Рассмотрим треугольник NB_1D ($\angle NB_1D = 90^\circ$), по теореме Пифагора

$$ND = \sqrt{B_1N^2 + B_1D^2} = \sqrt{\left(\frac{A_1B_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{BB_1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Применяя теорему Пифагора для треугольника CBD ($\angle CBD = 90^\circ$), получим

$$CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{BB_1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}.$$

Из точки N опустим перпендикуляр NH на прямую AB. Так как N – середина ребра B_1A_1, то H – середина ребра AB, CH – медиана, а следовательно, и высота правильного треугольника ABC.

$$CH = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}.$$

Из треугольника NHC имеем

$$NC = \sqrt{NH^2 + CH^2} = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Так как $ND^2 + CD^2 = NC^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle NDC = 90^\circ$, то есть прямые CD и DN перпендикулярны. Что и требовалось доказать.

б) Плоскости CDN и BCC_1 пересекаются по прямой CD. Проведём перпендикуляр DM к CD в плоскости BCC_1B_1. По доказанному выше $DN \perp CD$ (см. п. а)), следовательно, $\angle NDM$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями CDN и BCC_1. Найдём стороны треугольника ΔNDM.

Рассмотрим ΔMB_1D и ΔDBC ($\angle MB_1D = \angle DBC = 90^\circ$). Так как $\angle MDB_1 = 90^\circ - \angle BDC = \angle BCD$, то $\Delta MB_1D \sim \Delta DBC$ по двум углам с коэффициентом подобия $k = \dfrac{B_1D}{CB} = \dfrac{1}{2}$. Тогда $DM = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{\sqrt{65}}{4}$ и $MB_1 = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Опустим высоту A_1L в треугольнике $A_1B_1C_1$: $A_1L = CH = \dfrac{\sqrt{39}}{2}$. Тогда NM – медиана треугольника A_1LB_1, следовательно, $NM = \dfrac{1}{2}A_1L = \dfrac{\sqrt{39}}{4}$.

По теореме косинусов имеем

$$NM^2 = ND^2 + DM^2 - 2ND \cdot DM \cdot \cos\angle NDM,$$

$$\left(\frac{\sqrt{39}}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{65}}{4}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{\sqrt{65}}{4}\cdot\cos\angle NDM,$$

откуда

$$\cos\angle NDM = \frac{\sqrt{10}}{4},\ \angle NDM = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

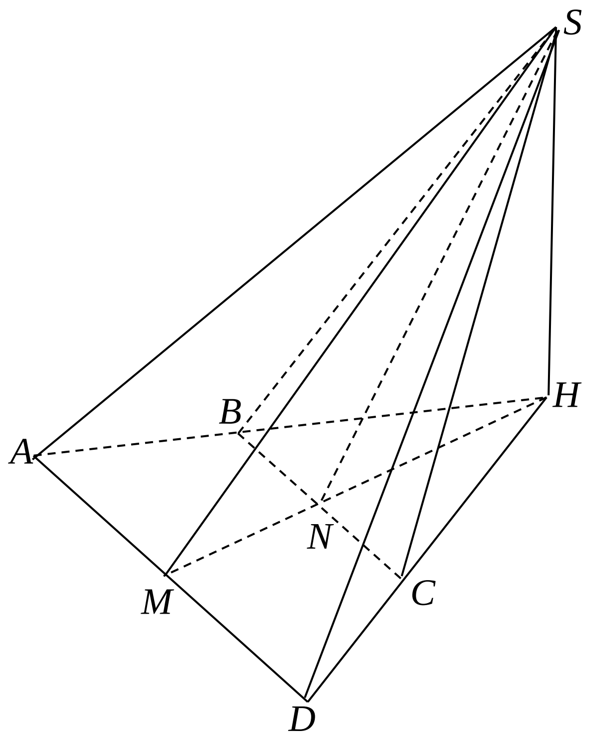
Ответ: б) $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Пример 20.8. В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция с острым углом 45°. Боковые грани SAB и SCD перпендикулярны основанию пирамиды.

а) Докажите, что плоскости SAB и SCD перпендикулярны.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если известно, что $BC = 6$, $AD = 12$, а объём пирамиды равен 27.

Решение:



а) Построим данную пирамиду. Продолжим боковые стороны AB и CD трапеции до пересечения в точке H. Восстановим перпендикуляр SH к плоскости основания пирамиды. Вершину S пирамиды соединяем с остальными вершинами. Получаем плоскости SAH и SDH, совпадающие с плоскостями SAB и SCD соответственно. Докажем, что боковые грани SAB и SCD пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, то есть, что $SABCD$ – искомая пирамида.

Так как $SH \perp (AHD)$ (по построению), а плоскость SAB проходит через прямую SH, то по признаку перпендикулярности двух плоскостей,

$(SAB)\perp(AHD)$. Аналогично, $(SCD)\perp(AHD)$.

SH – ребро двугранного угла, образованного плоскостями SAB и SCD. Так как $SH\perp AH$ и $SH\perp DH$, то $\angle AHD$ – линейный угол этого двугранного угла.

Рассмотрим ΔAHD. Так как $\angle HAD=\angle HDA=45^{\circ}$ ($ABCD$ – равнобедренная трапеция), то $\angle AHD=90^{\circ}$. Таким образом, $(SAB)\perp(SCD)$. Что и требовалось доказать.

б) Треугольник AHD – прямоугольный ($\angle AHD=90^{\circ}$), равнобедренный ($\angle HAD=\angle HDA=45^{\circ}$), следовательно, по теореме Пифагора, $AH=HD=6\sqrt{2}$. Так как $BC\parallel AD$ и $BC=\frac{1}{2}AD$, то BC – средняя линия треугольника AHD. Следовательно, треугольники BHC и AHD подобны с коэффициентом подобия $k=\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\mathrm{S}_{ABCD}=\mathrm{S}_{AHD}-\mathrm{S}_{BHC}=\mathrm{S}_{AHD}-\frac{1}{4}\mathrm{S}_{AHD}=\frac{3}{4}\mathrm{S}_{AHD}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(6\sqrt{2}\right)^{2}=27.$$

Найдём высоту SH пирамиды:

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\mathrm{S}_{ABCD}\cdot SH,\ 27=\frac{1}{3}\cdot 27\cdot SH,\ SH=3.$$

Площадь боковой поверхности $\mathrm{S}_{б}$ равна сумме площадей S_{SAB}, S_{SAD}, S_{SDC} и S_{SBC}.

Так как $AB=DC$, то

$$\mathrm{S}_{SAB}=\mathrm{S}_{SDC}=\frac{1}{2}AB\cdot SH=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{2}\cdot 3=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Проведём высоту HM в треугольнике AHD, $N=HM\cap BC$.

$$HM=\sqrt{AH^{2}-\left(\frac{1}{2}AD\right)^{2}}=\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^{2}-6^{2}}=6,$$

$$HN=\frac{1}{2}HM=3.$$

Рассмотрим треугольник SHN ($\angle SHN=90^{\circ}$):

$$SN=\sqrt{SH^{2}+HN^{2}}=\sqrt{3^{2}+3^{2}}=3\sqrt{2}.$$

Из треугольника SHM ($\angle SHM=90^{\circ}$):

$$SM=\sqrt{SH^{2}+HM^{2}}=\sqrt{3^{2}+6^{2}}=3\sqrt{5}.$$

Найдём площади равнобедренных треугольников SBC и SAD. SN – серединный перпендикуляр треугольника SBC, следовательно,

$$\mathrm{S}_{SBC}=\frac{1}{2}BC\cdot SN=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{2}=9\sqrt{2}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{S}_{SAD}=\frac{1}{2}AD\cdot SM=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3\sqrt{5}=18\sqrt{5}$$

Таким образом,

$$S_б = 2 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} + 9\sqrt{2} + 18\sqrt{5} = 18\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right).$$

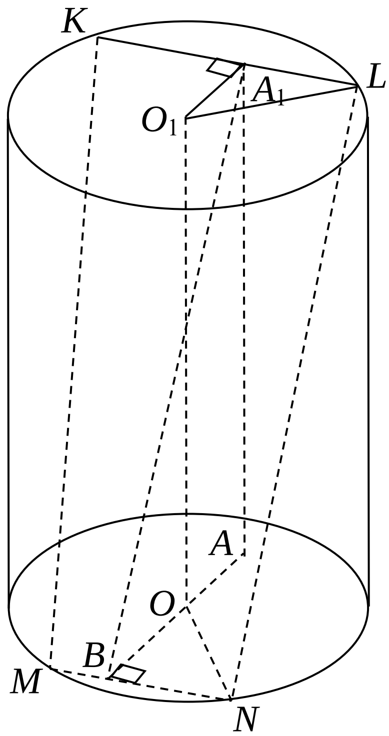
Ответ: б) $18\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$.

Пример 20.9. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Решение:



а) Пусть плоскость пересекает нижнее и верхнее основания по хордам MN и KL длинной 10 и 24 соответственно. Обозначим центры оснований цилиндра O и O_1.

Треугольник KO_1L равнобедренный, так как $KO_1 = O_1L = r = \frac{1}{2}d = 13$, O_1A_1 – серединный перпендикуляр треугольника, следовательно,

$$O_1A_1 = \sqrt{O_1L^2 - \left(\frac{1}{2}KL\right)^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

то есть хорда KL находится на расстоянии 5 от центра окружности основания.

Аналогично, можно доказать, что $OB = 12$, то есть хорда MN находится на расстоянии 12 от центра окружности основания. Поэтому расстояние AB между их проекциями на плоскость нижнего основания составляет либо $5 + 12 = 17$, либо $12 - 5 = 7$. Тогда расстояние между хордами $A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2}$ составляет либо $\sqrt{21^2 + 17^2} = \sqrt{730}$, либо $\sqrt{21^2 + 7^2} = 7\sqrt{10}$. По условию реализовался первый случай, в нём проекции хорд лежат по разные стороны от оси цилиндра. Значит, ось пересекает данную плоскость в пределах цилиндра, то есть центры оснований лежат по разные стороны от неё.

б) Найдём тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью нижнего основания цилиндра. MN – линия пересечения этих плоскостей. Так как AB – проекция прямой A_1B, лежащей в плоскости сечения, – перпендикулярна MN, то по теореме о трёх перпендикулярах $A_1B \perp MN$. Следовательно, $\angle A_1BA$ – искомый угол.

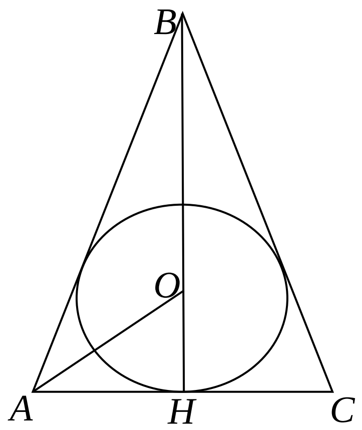
$$tg\angle A_1BA = \frac{A_1A}{AB} = \frac{21}{17}.$$

Ответ: б) $\frac{21}{17}$.

Пример 20.10. В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.



Решение:

а) Осевым сечением является равнобедренный треугольник ABC боковые стороны которого являются образующими конуса, а основание AC – его диаметром, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара.

б) Пусть O – центр вписанной окружности, OH – серединный перпендикуляр к AC, AO – биссектриса угла BAC. Тогда

$$tg\angle OAH = \frac{OH}{AH} = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2},$$

$$tg\angle BAC = tg(2\cdot\angle OAH) = \frac{2tg\angle OAH}{1 - tg^2\angle OAH} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

Тогда $BH = AH\cdot tg\angle BAC = 3\cdot\frac{4}{3} = 4$, $AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.

Для площадей поверхностей конуса и шара имеем:

$$S_{кон.} = \pi R^2 + \pi Rl = 3^2\cdot\pi + 3\cdot 5\cdot\pi = 24\pi,$$

$$S_{ш.} = 4\pi r^2 = 4\pi(1,5)^2 = 9\pi.$$

Таким образом, искомое отношение $\frac{S_{кон.}}{S_{ш.}} = \frac{24\pi}{9\pi}$, или $8:3$.

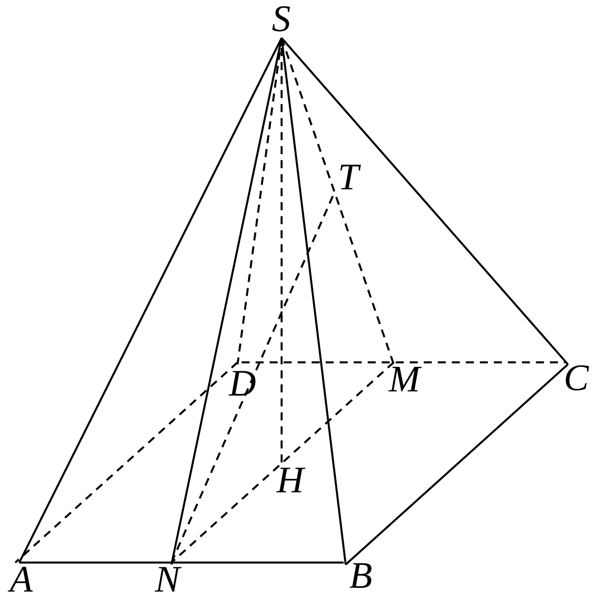
Ответ: б) $8:3$.

Пример 20.11. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$ а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N – середины рёбер CD и AB, соответственно, а NT – высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой SM.

б) Найдите расстояние между NT и SC.

Решение:



а) Так как NT – высота пирамиды $NSCD$, то прямая NT перпендикулярна плоскости SCD, а значит и прямым DT и CT. Тогда $\Delta DTN = \Delta CTN$ по катету и гипотенузе ($\angle DTN = \angle CTN = 90^{\circ}$), следовательно, $DT = CT$, то есть точка T лежит на прямой SM.

Отрезок MN соединяет середины сторон CD и AB квадрата $ABCD$ и содержит точку H.

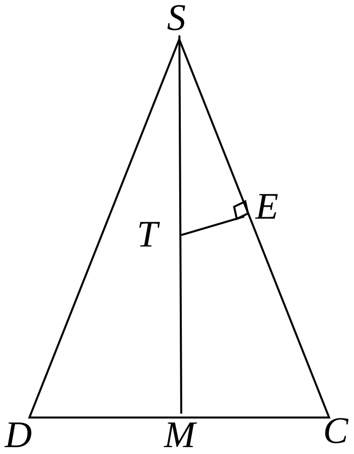
Таким образом, точки T и H лежат в плоскости SMN, перпендикулярной плоскости ABC.

Рассмотрим треугольник SMN:

$$MN = AB = 2\sqrt{3},$$

$$SN = SM = \sqrt{SH^2 + NH^2} = \sqrt{SH^2 + \left(\frac{1}{2}MN\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$$

Итак, треугольник SMN – равносторонний, NT его высота, а значит, NT является также и медианой. Таким образом, точка T – середина SM. Что и требовалось доказать.



б) Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки T на прямую SC. Прямая TE лежит в плоскости SCD, следовательно, $NT \perp TE$. Таким образом, отрезок TE – искомое расстояние.

Прямоугольные треугольники SET и SMC подобны по острому углу, следовательно, $\frac{TE}{CM} = \frac{ST}{SC}$, откуда

$$TE = \frac{ST \cdot CM}{SC} = \frac{\frac{1}{2}SM \cdot \frac{1}{2}CD}{\sqrt{SM^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{4\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

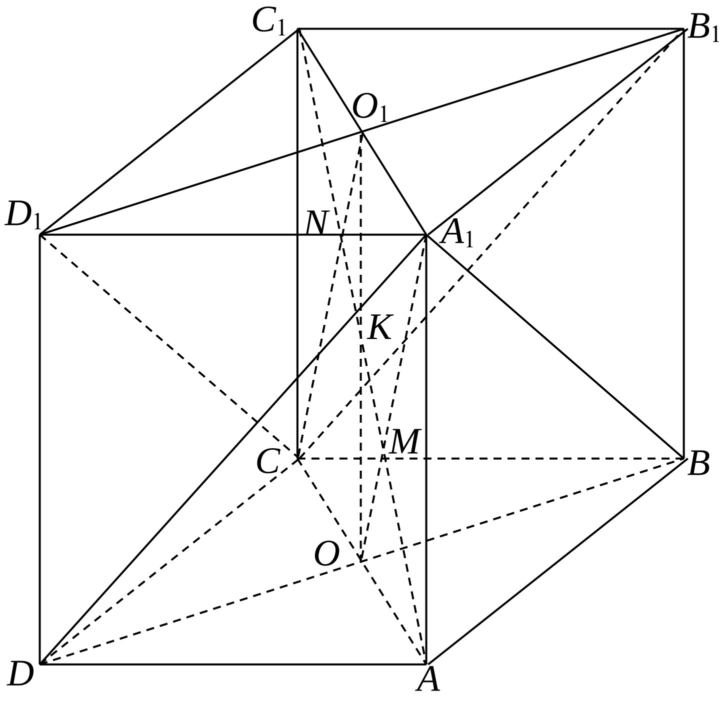
Ответ: б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Пример 20.12. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2.

а) Докажите, что плоскости A_1BD и B_1D_1C параллельны.

б) Найдите расстояние между плоскостями A_1BD и B_1D_1C.

Решение:



а) Рассмотрим плоскость треугольника A_1BD. Ортогональная проекция AC диагонали AC_1 куба на плоскость основания $ABCD$ перпендикулярна прямой BD, поэтому AC_1 и BD перпендикулярны по теореме о трех перпендикулярах. Аналогично, ортогональная проекция AD_1 диагонали AC_1 куба на плоскость AA_1D_1D перпендикулярна прямой A_1D, следовательно, AC_1 перпендикулярна A_1D. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости треугольника A_1BD. Аналогично можно доказать, что плоскость треугольника B_1D_1C перпендикулярна диагонали AC_1. Плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой. Что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим сечение AA_1C_1C. Плоскость AA_1C_1C пересекает плоскости A_1BD и B_1D_1C по параллельным прямым A_1O и CO_1 соответственно.

Так как AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD, то $AC_1 \perp A_1O$. Аналогично, $AC_1 \perp CO_1$. Пусть M и N – основания высот AM и C_1N прямоугольных треугольников A_1AO и CC_1O_1 соответственно. Тогда искомое расстояние между плоскостями равно длине отрезка MN. Катетами указанных треугольников являются ребро куба и половина диагонали грани куба. Тем самым, эти треугольники равны, а следовательно, равны и их высоты, проведённые к гипотенузам, то есть $C_1N = AM$. Из подобия прямоугольных треугольников A_1AO и A_1MA (по острому углу) следует, что

$$AM = \frac{AA_1 \cdot AO}{A_1O} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Тогда

$$MN = AC_1 - C_1N - AM = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} - 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

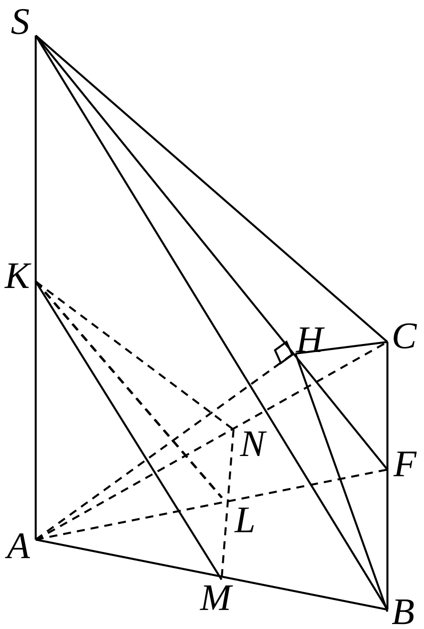
Ответ: б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 20.13. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC.

а) Докажите, что высота пирамиды, проведённая из точки A, делится плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC и SA, пополам.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA=\sqrt{5}$, $AB=AC=5$, $BC=2\sqrt{5}$.

Решение:



а) Пусть AH – искомая высота, $SH \cap BC = F$. Проведем AF. Обозначим M, N и K – середины рёбер AB, AC и SA соответственно, тогда MN – средняя линия треугольника ABC. Следовательно, MN делит AF на две равные части. Пусть $L = AF \cap MN$, тогда KL – средняя линия треугольника SAF, она делит AH на две равные части. Поскольку KL лежит в плоскости MNK, то эта плоскость делит AH пополам. Что и требовалось доказать.

б) Так как $AB = AC$, то треугольник ABC – равнобедренный. Так как ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, то $SA \perp AB$ и $SA \perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников SAB и SAC (по двум катетам) следует, что $SB = SC$, то есть треугольник SBC также равнобедренный.

Так как AH – высота пирамиды, то AH перпендикулярна плоскости SBC, а значит $AH \perp HB$ и $AH \perp HC$. Из равенства прямоугольных треугольников AHB и AHC (по катету и гипотенузе) следует, что $HB = HC$, то есть точка H лежит на серединном перпендикуляре к BC. Таким образом, SF – медиана, биссектриса и высота равнобедренного треугольника SBC. Тогда AF – медиана, биссектриса и высота равнобедренного треугольника ABC. Таким образом, $BF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{5}$ и, по теореме Пифагора,

$$AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = 2\sqrt{5}.$$

Так как $SA \perp (ABC)$, то $SA \perp AF$, следовательно, треугольник SAF – прямоугольный. Применяя теорему Пифагора, получим

$$SF = \sqrt{SA^2 + AF^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 5.$$

Найдём высоту AH прямоугольного треугольника SAF:

$$AH = \frac{2 \cdot S_{SAF}}{SF} = \frac{SA \cdot AF}{SF} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{5} = 2.$$

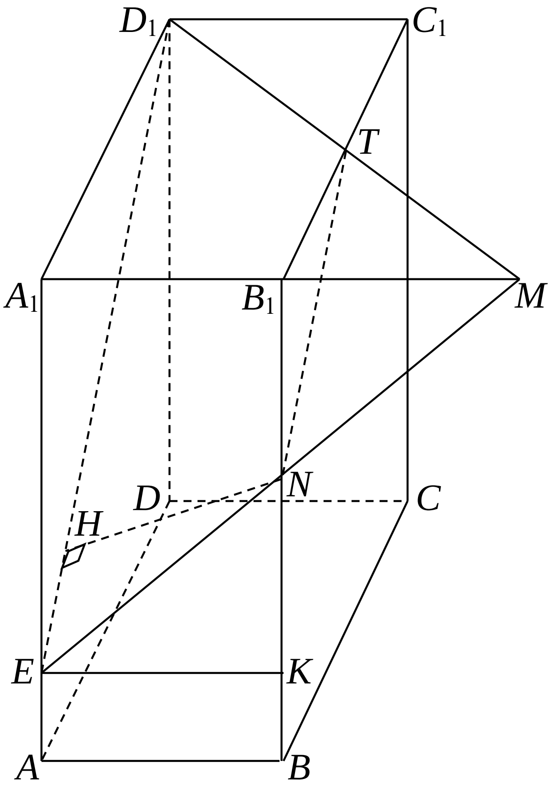
Тогда искомое расстояние равно $\frac{1}{2}AH$, то есть 1.

Ответ: б) 1.

Пример 20.14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4:3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.



Решение:

а) Построим сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. $D_1T \cap A_1B_1 = M$, $EM \cap BB_1 = N$, четырёхугольник ED_1TN – искомое сечение.

Из подобия прямоугольных треугольников D_1A_1M и TB_1M, а также MA_1E и MB_1N, следует, что

$$\frac{B_1M}{A_1M} = \frac{B_1T}{A_1D_1},$$

$$\frac{B_1N}{A_1E} = \frac{B_1M}{A_1M}.$$

То есть

$$B_1N = \frac{A_1E \cdot B_1T}{A_1D_1} = \frac{\frac{6}{7}AA_1 \cdot \frac{1}{2}B_1C_1}{A_1D_1} = 6.$$

Тогда $BN = BB_1 - NB_1 = 14 - 6 = 8$ и $BN : NB_1 = 4:3$. Что и требовалось доказать.

б) Четырёхугольник ED_1TN – сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Так как стороны ED_1 и TN параллельны, но не равны, то ED_1TN – трапеция.

Рассмотрим прямоугольные треугольники D_1A_1M и EA_1M. Так как $A_1D_1 = 12$ и $A_1E = \frac{6}{7}AA_1 = \frac{6}{7} \cdot 14 = 12$, то $\Delta D_1A_1M = \Delta EA_1M$ (по двум катетам). Значит $D_1M = EM$. Поскольку $ED_1 \parallel TN$, то $D_1T = EN$, следовательно, ED_1TN – равнобедренная трапеция.

$\Delta TMN \sim \Delta D_1ME$, следовательно, $\frac{TN}{ED_1} = \frac{MT}{MD_1}$. Так как $\Delta D_1A_1M \sim \Delta TB_1M$, то $\frac{MT}{MD_1} = \frac{B_1T}{A_1D_1}$, поэтому $\frac{TN}{ED_1} = \frac{1}{2}$, то есть $TN = \frac{1}{2}ED_1$. По теореме Пифагора

$$ED_1 = \sqrt{A_1D_1^{\,2} + A_1E^2} = \sqrt{A_1D_1^{\,2} + \left(\frac{6}{7}AA_1\right)^2} = \sqrt{12^2 + \left(\frac{6}{7} \cdot 14\right)^2} = 12\sqrt{2},$$

$$TN = 6\sqrt{2}.$$

Найдём высоту NH равнобедренной трапеции ED_1TN. Через точку E проведём прямую, параллельную стороне AB. По теореме Пифагора:

$$EN^2 = EK^2 + (BN - KB)^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(8 - \frac{1}{7}\cdot 14\right)^2 = 68,$$

$$NH = \sqrt{EN^2 - EH^2} = \sqrt{EN^2 - \left(\frac{ED_1 - TN}{2}\right)^2} = \sqrt{68 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{ED_1TN} = \dfrac{ED_1 + TN}{2}\cdot NH = \dfrac{12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2}\cdot 5\sqrt{2} = 90.$

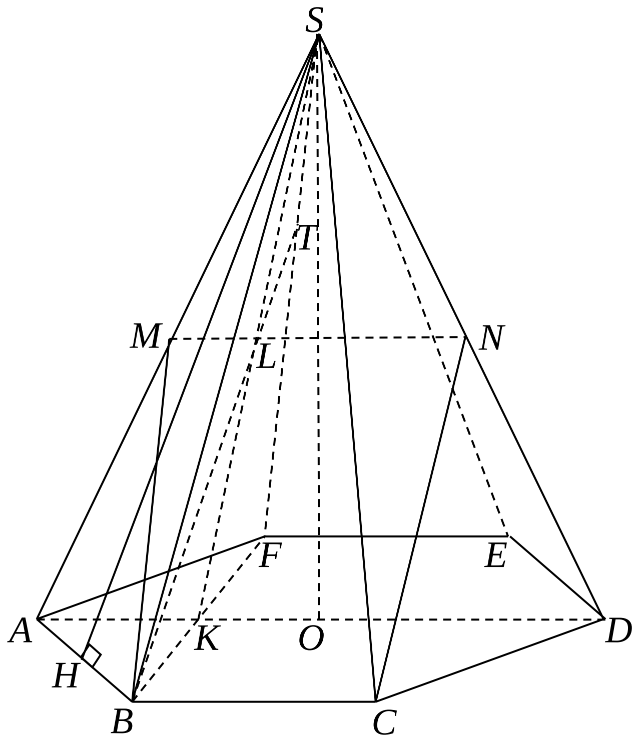
Ответ: б) 90.

Пример 20.15. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении $2:1$, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

Решение:



а) Пусть M и N – середины рёбер SA и SD соответственно. Так как MN – средняя линия треугольника SAD, то $MN \parallel AD \parallel BC$, поэтому точка B также лежит в плоскости MNC. Поэтому с гранью ASB данная плоскость пересекается по прямой BM – медиане треугольника ASB. Она делит его медиану SH (SH – апофема грани ASB, то есть высота и медиана равнобедренного треугольника ASB) в отношении $2:1$ считая от вершины. Что и требовалось доказать.

б) Пусть $K = AD \cap BF$, $L = MN \cap SK$. Так как MN – средняя линия треугольника SAD, то L – середина отрезка SK.

Рассмотрим треугольник SBF: SK – средняя линия, L – её середина. Прямая BL лежит в плоскости MNC, $T = BL \cap SF$. По теореме Менелая для треугольника SKF и прямой BT имеем:

$$\frac{FT}{TS}\cdot\frac{SL}{LK}\cdot\frac{KB}{BF} = 1,$$

откуда $\frac{FT}{TS}=2$. То есть плоскость MNC делит ребро SF в отношении $1:2$, считая от вершины S.

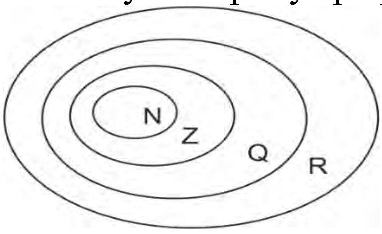
Ответ: б) $1:2$.

21. Задачи повышенной сложности

В задачах данного раздела можно выделить следующие типы:

1. Числа и их свойства.
2. Числовые наборы на карточках и досках.
3. Последовательности и прогрессии.
4. Сюжетные задачи.

Для решения задач необходимо знать виды чисел, понятие делимости чисел, признаки делимости, правила нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, основную теорему арифметики.



N – натуральные числа. Числа, употребляемые для счета: 1,2,3,…

Z – целые числа. Натуральные, им противоположные и нуль: …-2,-1,0,1,2…

Q – рациональные числа. Числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p – целое число, q – натуральное число: 3, $\frac{5}{16}$, 2,31 и т.д.

R – иррациональные числа. Числа, которые нельзя записать в виде дроби $\frac{p}{q}$ или в виде периодической десятичной дроби: π, е, $\sqrt{6}$ $\log_7 9$ и т.д.

Число a делится на число $b \neq 0$ ($a \vdots b$), если найдется такое число c, что $a = b \cdot c$

Свойства:

- Если a и b делятся на c, то $(a+b)$ тоже делится на c;
- Если a и b делятся на c, а m и n - целые, то $ma+nb$ тоже делится на c.

Формула деления с остатком: Если $a=b\cdot c+r$, то число a делится на b с остатком r.

Основная теорема арифметики:

Любое натуральное число можно представить в виде произведения простых делителей, взятых в натуральных степенях, причем это разложение единственно. $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{n_s}$

Количество делителей натурального числа равно $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_s+1)$.

Признаки делимости:

$a \vdots 2 \Leftrightarrow$ последняя цифра числа a четная;

$a \vdots 3 \Leftrightarrow$ сумма цифр числа a делится на 3;

$a \vdots 4 \Leftrightarrow$ число, составленное из двух последних цифр числа a, делится на 4;

$a \vdots 5 \Leftrightarrow$ число a заканчивается на 0 или на 5;

$a \vdots 8 \Leftrightarrow$ число, составленное из трех последних цифр числа a, делится на 8;

$a \vdots 9 \Leftrightarrow$ сумма цифр числа a делится на 9;

$a \vdots 10 \Leftrightarrow$ последняя цифра числа a равна 0;

$a \vdots 11 \Leftrightarrow$ суммы цифр на четных и нечетных позициях числа a равны или их разность кратна 11.

В некоторых задачах при нахождении наибольших и наименьших значений применяется **метод «Оценка плюс пример»:**

Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины A. Действуем в два этапа.

1) *Оценка*. Показываем, что выполнено неравенство $A \geq \alpha$.

2) *Пример*. Предъявляем пример, когда достигается равенство $A = \alpha$.

1. Числа и их свойства.

Пример 21.1 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение:

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0m = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведенного выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $(k + l + m)$ - количество целых чисел - делится на 4. По условию $40 < (k + l + m) < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведем равенство $4k - 8l + 0m = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l \geq k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Оценка. Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l + 0m = -3(k + l + m)$, получим $4k - 8l = -132$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \leq 44$, получаем: $3l - 33 \leq 44$, $3l \leq 77$, $l \leq 25$, $k = 2l - 33 \leq 17$. Значит, положительных чисел не более 17.

в) Пример Приведем пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число −8 и два раза написан 0. Тогда $\frac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=-3$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17

2. Числовые наборы на карточках и досках.

Пример 21.2 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение:

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе - это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе - это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 - наименьшее число в наборе - является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе - это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41-7-8-10=16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа - это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

3. Последовательности и прогрессии.

Арифметическая прогрессия - это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа d: $a_{n+1}=a_n+d$, $(n=1,2,\ldots)$.

Фиксированное число d называется разностью арифметической прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ вычисляется по формуле: $S_n = \dfrac{2a_1 + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n = \dfrac{(a_1 + a_2)}{2}\cdot n$

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних: $a_n = \dfrac{(a_{n-1} + a_{n+1})}{2}$.

Геометрическая прогрессия - это последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа q: $b_{n+1} = b_n \cdot q \;\; (n = 1,2,\ldots)$.

Фиксированное число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула суммы $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле: $S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

Пример 21.3 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

Решение:

а) Да, может. Числа 2, 3, 4, 5 составляют арифметическую прогрессию, их сумма равна 14.

б) Пусть a - первый член, d - разность, n - число членов прогрессии, тогда их сумма равна $\dfrac{2a + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n$. Чтобы количество членов было наибольшим, первый член и разность должны быть наименьшими. Пусть они равны 1, тогда по условию $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2} \leq 900$. Наибольшее натуральное решение этого неравенства $n = 41$. Такой результат получается при прогрессии $1 + 2 + \ldots + 41 = 861$.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии имеем: $\dfrac{2a + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n = 123 \Leftrightarrow (2a + d\cdot(n-1))\cdot n = 2\cdot 3\cdot 41$.

Таким образом, число членов прогрессии n является делителем числа 246. Если $n \geq 41$, то левая часть больше 246: $(2a + d\cdot(n-1))\cdot n \geq 42\cdot 41 > 246$ следовательно $n<41$. Поскольку $n \geq 3$, получаем, что $n=3$ или $n=6$ Прогрессии из трёх и шести членов с суммой 123 существуют: например, 40, 41, 42 и 3, 10, 17, 24, 31, 38.

Ответ: а) да; б) 41; в) 3; 6.

4. Сюжетные задачи.

Пример 21.4 Два игрока ходят по очереди. Перед началом игры у них есть поровну горошин. Ход состоит в передаче сопернику любого числа горошин. Не разрешается передавать такое количество горошин, которое до этого уже кто-то в этой партии передал. Ноль горошин тоже передавать нельзя. Тот, кто не может сделать очередной ход по правилам, - считается проигравшим. Начинающий или его соперник победит в этой игре, как бы ни играл партнёр?

Рассмотрите случаи:

а) у каждого по две горошины;

б) у каждого по три горошины;

в) у каждого по N горошин.

Решение:

а) Первый игрок либо отдаст второму две горошины (на это второй даст ему одну, и у первого не будет ходов), либо отдаст одну. В этом случае второй игрок может отдать ему две горошины, назад получит три, отдаст четыре и победит. Так или иначе выигрывает второй игрок.

б) Если первый игрок отдаст три или две, назад получит одну и сразу проиграет. Если же отдаст одну, то назад получит две. Далее у первого два варианта хода, но оба плохи: отдав 4, он получит назад 3 и проиграет, а отдав 3, получит 4, будет вынужден отдать 5, получит 6 и всё равно проиграет.

в) Победит второй игрок, придерживаясь правила: «всякий раз отдавай минимально возможное число горошин». Докажем, что это действительно выигрышная стратегия. Достаточно показать, что у второго игрока всегда будет ход. Начинает игру у нас первый игрок, но мы схитрим и сделаем так, чтобы игру начинал второй: предположим, что второй (условно) передаёт сначала первому 0 горошин. Теперь можно видеть, что всякий раз в ответ на ход второго первый игрок вынужден будет отдать ему больше, чем сам получил. Поэтому количество горошин у второго с каждым парным ходом будет увеличиваться хотя бы на одну. Перед K-ом ходом у него будет не менее $N+K$ горошин. А отдать на K-ом ходу он в соответствии со своей стратегией должен не более $2K$ горошин. Это осуществимо, поскольку более чем N ходов игра длиться не может, а значит $N+K \geq 2K$.

Ответ: а) Побеждает второй игрок; б) Побеждает второй игрок. в) Побеждает второй игрок

22. Задания для самостоятельной работы

1. Найти значение выражения:

1) $$\frac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2};$$

2) $$\frac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25};$$

3) $$\frac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{0{,}0001:0{,}005};$$

4) $$\left(\frac{0{,}012}{5}+\frac{0{,}04104}{5{,}4}\right)\cdot 4560-42\frac{1}{3}\cdot 3\frac{4}{15};$$

5) $$\frac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04};$$

6) $$\frac{(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}):18\frac{1}{6}}{0{,}002};$$

7) $$\frac{\left(95\frac{7}{30}-93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4}+0{,}373}{0{,}2};$$

8) $$\frac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1{,}25):2{,}5};$$

9) $$\frac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{(3\frac{1}{12}+4{,}375):19\frac{8}{9}};$$

10) $$\frac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}.$$

2. Упростить выражение:

1) $$\frac{1-\sqrt[4]{x^2}}{1-\sqrt[4]{x}}-1;$$

2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}}$;

3) $\dfrac{x\sqrt{x}+27}{x-3\sqrt{x}+9}-\sqrt{x}$;

4) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$;

5) $\sqrt[5]{\dfrac{n^4}{8m^3}}:\sqrt[5]{\dfrac{4m^2}{n}}$;

6) $\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt[4]{a}-1}-\sqrt[4]{a}$;

7) $\dfrac{1+a}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}-2a^{\frac{1}{6}}$;

8) $\dfrac{1-y^{\frac{3}{2}}}{1+y^{\frac{1}{2}}+y}+2\sqrt{y}$;

9) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1}-2x^{\frac{1}{8}}$;

10) $1-\dfrac{4-в^{\frac{1}{3}}}{2+в^{\frac{1}{6}}}$.

3. Решить задачу:

1) Два года подряд население города увеличилось ежегодно на 20%. На сколько процентов увеличилось население города за эти два года?

2) В течение двух суток количество бактерий в пробирке увеличилось на 40% ежесуточно. На сколько процентов увеличилось количество бактерий за эти двое суток?

3) По договору банк начисляет на вклад ежегодно 10%. Насколько процентов увеличился вклад за два года?

4) Два квартала подряд предприятие увеличивало объем выпуска продукции на 30% ежеквартально. На сколько процентов увеличился объем выпуска продукции за эти два квартала?

5) Зарплата работника в продолжении двух месяцев уменьшилась на 10% ежемесячно. На сколько процентов уменьшилась зарплата за эти два месяца?

6) Количество зайцев в заповеднике уменьшалось в течение двух лет на 20% ежегодно. На сколько процентов уменьшилось количество зайцев в заповеднике за эти два года?

7) Гражданин взял из своих сбережений 30%, а затем 50% от оставшейся части. На сколько процентов уменьшились в результате сбережения этого гражданина?

8) Два месяца подряд количество туристов, направляющихся в опасные регионы, уменьшилось на 10% ежемесячно. На сколько процентов уменьшилось количество туристов за эти два месяца?

9) Если в городе B на 20% больше жителей, чем в городе A, а в городе C – на 10% меньше, чем в городе B, то в городе C по сравнению с городом A жителей больше на … процентов.

10) У фермера C урожай яблок на 30% меньше, чем у фермера B, а у фермера D – на 20% больше, чем у фермера C. На сколько процентов меньше урожай яблок у фермера D по сравнению с фермером B?

4. Решить уравнение:

1) $|x^2+2x-1|=5x+11$;

2) $\sqrt{2x+5}=|x+3|-2$;

3) $\sqrt{2x+10}=|x+4|-1$;

4) $|x-1|+|2-x|=3$;

5) $|x-4|+|x+4|=8$;

6) $|2x-15|=22-|2x+7|$;

7) $|2x+1|=|x|$;

8) $|-2x+4|-|2x+5|=-9$;

9) $x^2-|x-2|=0$;

10) $|11-2x^2|=3$.

5. Решить неравенство:

1) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$;

2) $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}$;

3) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1$;

4) $x^6-9x^3+8>0$;

5) $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$;

6) $\dfrac{1}{3x-2-x^2}\geq\dfrac{3}{7x-4-3x^2}$;

7) $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$;

8) $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$;

9) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$;

10) $\left|2x^2-9x+13\right|\geq 20$.

6. Построить график функции:

1) $y=-x^2+2x-4$;

2) $y=x^2-4x+6$;

3) $y=-2x^2-8x+1$;

4) $y=x^2+4x+3$;

5) $y=-x^2+4x-5$;

6) $y=2x^2-8x+1$;

7) $y=-2x^2+4x+1$;

8) $y=x^2+6x+8$;

9) $y=-x^2+6x-12$;

10) $y=-x^2-2x-2$.

7. Решить уравнение:

1) $3^{x+2}+9^{x+1}-810=0$;

2) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}-347=0$;

3) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$;

4) $81^{\sqrt{x}}-4\cdot 9^{\sqrt{x}}+3=0$;

5) $\dfrac{2^x}{5^{x-1}}+3=\dfrac{5^x}{2^{x-1}}$;

6) $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$;

7) $10^x-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950$;

8) $2\cdot 3^{x+3}-5\cdot 3^{x-2}=1443$;

9) $2^{2x+1}+3^{2x+1}=5\cdot 6^x$;

10) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}$.

8. Вычислить:

1) $0{,}2^{\frac{1}{2}\log_5 4 - \log_{25} 16}$;

2) $4^{0{,}5\log_4 9 - 0{,}25\log_2 25}$;

3) $36^{\frac{1}{3}\log_6 8 + 2\log_6 3}$;

4) $\log_6 4 + \log_6 9 + \log_4 6 \cdot \log_{\sqrt{6}} 2 + 5^{\log_5 2}$;

5) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \frac{6}{5}\log_3 5} \cdot 5^{\frac{3}{5}}$;

6) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$;

7) $9^{\frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{9} + \frac{3}{2}\log_8 2}$;

8) $8^{\frac{1}{3}\log_2 (1 - \frac{1}{3}) + 2\log_{27} 3}$;

9) $4\sqrt{3} + 5^{\log_5 \frac{3}{5}} - 15^{\frac{1}{2} + \log_{15} \frac{4}{\sqrt{5}}}$;

10) $72 \cdot (49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4})$.

9. Упростить или доказать тождество:

1) $\sin^2(4\frac{1}{6}\pi) + \cos^2(2\frac{1}{4}\pi) + \mathrm{ctg}^2 420^\circ + \mathrm{ctg}^2 \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos(2x+4\pi) \cdot tg(2x - 3\pi) - \sin(5\pi - 2x)$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{tg\alpha + ctg\alpha}$;

4) $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \dfrac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$;

5) $\dfrac{tg 2x \cdot tgx}{tg 2x - tgx} = \sin 2x$;

6) $tg\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} - 1 = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}$;

7) $\frac{\cos 2\alpha}{ctg^2\alpha - tg^2\alpha} = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$;

8) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = tg 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha}$;

9) $tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$;

10) $tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$.

10. Решить уравнение:

1) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

2) $2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} - 1 = 0$;

3) $2\cos^2 x - 1 = 0$;

4) $6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0$;

5) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;

6) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

7) $tg\frac{x}{2} = -1$;

8) $tg^2 x - 4tgx + 3 = 0$;

9) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$;

10) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

11. Решить задачу:

1) Основания трапеции равны 10 м и 31 м, а боковые стороны – 20 м и 13 м. Найдите высоту трапеции.

2) Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC, если высота BH равна 12 и известно, что $\sin A = \frac{12}{13}$, $\sin C = \frac{4}{5}$.

3) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

4) Около равнобедренного треугольника с основанием АС и углом при основании 75° описана окружность с центром О. Найдите ее радиус, если площадь треугольника ВОС равна 16.

5) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 м, а радиус описанной окружности равен 5 м. Найдите больший катет треугольника.

6) Основание равнобедренного треугольника равно 30 м, а высота, проведенная из вершины основания – 24 м. Найдите площадь треугольника.

7) Периметр прямоугольного треугольника равен 72 м, а радиус вписанной в него окружности – 6 м. Найдите диаметр описанной окружности.

8) В прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющим с ним общий угол. Найдите площадь квадрата, если катеты треугольника равны 10 м и 15 м.

9) Стороны треугольника равны 12 м, 16 м и 20 м. Найдите его высоту, проведенную из вершины большего угла.

10) Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 6 м, большее – 12 м, угол при основании – 60°. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

12. Решить задачу:

1) Боковые грани правильной треугольной призмы – квадраты. Площадь боковой поверхности призмы равна 144. Найти объем пирамиды.

2) Образующая конуса равна 12 и составляет с плоскостью основания угол 60°. Определить объем конуса.

3) Металлический цилиндр с диаметром основания $d = 4$ см и высотой $h = 4$ см переплавлен в шар. Вычислить радиус этого шара.

4) Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой высота равна $\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине равен 30°.

5) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $\sqrt{6}$, радиус окружности, описанной около основания, равен $\sqrt{2}$. Найти объем пирамиды.

6) В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°. Найти объем пирамиды.

7) В цилиндр вписан шар. Найти объем шара, если объем цилиндра равен 7,5.

8) Найти радиус шара, объем которого равен объему тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, длина которого равна 6.

9) В основании правильной треугольной призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 4. Найти объем призмы, если высота призмы равна 7.

10) В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой 12. Найти объем призмы, если ее высота равна 4.13.

13. Решить задачу

1) На ребре AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка M так, что $AM:MA_1=1:5$. Через точки M и D проведена плоскость α, параллельная прямой A_1C_1 и пересекающая ребро BB_1 в точке N. а) Докажите, что $BN:BB_1=1:3$. б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $BC=6$, $BB_1=9$

2) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра основания равны 4, а боковые рёбра равны 5. Точка K – середина ребра B_1C_1, точка P лежит на ребре CC_1 так, что $C_1P:PC=1:4$. а) Докажите, что прямые AP и PK перпендикулярны. б) Найдите угол между плоскостями APK и CAA_1.

3) Вокруг куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A, B и M, образует угол 15° с плоскостью ABC. а) Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A, B и M. б) Найдите длину линии пересечения плоскости сечения и сферы.

4) Основанием пирамиды является трапеция с основаниями 25 и 7 и острым углом $\arccos 0{,}6$. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом 60°. а) Докажите, что существует точка M, одинаково удаленная от всех вершин пирамиды (центр описанной сферы). б) Найдите объём данной пирамиды.

5) Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$. а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости. б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

6) В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения. а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой. б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

7**)** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, боковое ребро SA – $12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой SC и пересекающая ребро SC в точке M. а) Докажите, что плоскость α делит высоту SH пирамиды $SABCD$ в отношении $2:1$, считая от вершины S. б) Найдите расстояние между прямыми SH и BM.

8) Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер AB, AC и SA, отсекает от пирамиды $SABC$ пирамиду, объём которой в 8 раз меньше объёма пирамиды $SABC$. б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

9) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 6. а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60°. б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

10) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5:3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 5:11$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$. а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1. б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

11) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковые рёбра равны 2, а стороны основания – 1. а) Докажите, что плоскость, проходящая через вершину S и середины рёбер AF и CD, перпендикулярна плоскости основания. б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

12) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. а) Постройте прямую пересечения плоскости AA_1DD_1 с плоскостью, проходящей через точки D, B_1 и F_1. б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

13**)** Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания. б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

13. Решить задачи с параметром

1) Решить уравнение: $\dfrac{(b+2)x\text{-}3}{x\text{-}1} = 0$

2) Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\sqrt{3ax + 5a} = 3x + 5$ имеет только одно решение.

3) Найдите все значения параметра *a*, при которых неравенство $\sqrt{3a^2 - x^2} \geq |x + a|$ имеет единственное решение.

4) При каких значениях параметра *a* функция у=$\dfrac{2^{ax} - 2^x}{a-1}$ является нечетной?

5) Найдите все значения параметра *a*, при которых существует такое значение параметра *b*, что уравнение $\frac{4^x - a\cdot 2^x}{2^x - 1} = b$ не имеет решения.

6) При каких значениях параметра *a* решением неравенства $3^{a-|x|} > \frac{1}{3}$ является интервал (-4; 4)?

7) Найдите все значения параметра *a*, при которых неравенство $(2x^2 - (a+4)x + 2a)\log_2 \frac{|x|}{2} \le 0$ имеет только два решения.

8) Найдите все значения параметра *a*, при которых прямая *y* = *a* пересекает график функции $f(x) = \frac{13\cdot\log_{12}(10x^2+1)+15}{1-3\cdot\log_{12}(10x^2+1)}$ хотя бы в одной точке.

9) При каких значениях параметра *a*, уравнение $\log_{0,25}\frac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2} = a$ имеет решение?

10) При каких значениях параметра *a* неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}}\frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5} > 0$ справедливо для любых $x \in D\ (H)$?

14. Решить задачи

1) а) Решить уравнение $\frac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = 4^{2\cos^2 x - x}$;

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$

2) а) Решить уравнение $\left(49^{\cos x}\right)^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$;

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}, 4\pi\right]$

3) а) Решить уравнение $\left(27^{\cos x}\right)^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$;

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) а) Решить уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x}\cdot 5^{-\cos x}$;

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$

5) а) Решить уравнение $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$;

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$.

6) $4\log_{16}\cos 2x + 2\log_4 \sin x + \log_2 \cos x + 3 < 0$;

7) $\frac{\log_4\left(2^x - 1\right)}{x-1} \le 1$;

8) $\left(x+1\right)\log_3 6 + \log_3\left(2^x - \frac{1}{6}\right) \le x - 1$;

9) $\frac{1-\sqrt{1-8\log_2^2 x}}{2\log x} < 1$;

10) $\frac{1-2^{x^2+2x-15}}{\left(\log_{1,7}\left|x-1\right|^2\right)} > 0$.

15. Решить задачи:

1) В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;

– с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредита банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита.

2) 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн. рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку в первые 12 месяцев?

3) Степан хочет взять в кредит 1,2 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет Степан может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тысяч рублей?

4) 15 января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Текущий долг	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

5) Вкладчик положил в банк 8000 рублей. По истечении года к его вкладу были добавлены деньги, начисленные в качестве процентов, и, помимо этого, вкладчик увеличил свой вклад на 1360 рублей. Еще через год он решил снять 1440 рублей, а остальные 9360 рублей положил на новый срок. Чему равна процентная ставка в этом банке?

6) В коммерческий банк был сделан вклад под фиксированный процент годового дохода. За первые два года величина вклада возросла на 21000 рублей, а за третий год она увеличилась еще на 12100 рублей. Какова была первоначальная величина вклада?

7) У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 500 ц/га. Фермер может продать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

8) В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

9) В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг. алюминия или 0,1 кг. никеля. Во второй области для добычи x кг. алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг. никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором 1 кг. алюминия приходится на 2 кг. никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

10) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в стуки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

11) Старший брат на мотоцикле, а младший на велосипеде совершили двухчасовую безостановочную поездку в лес и обратно. При этом мотоциклист проезжал каждый километр на 4 мин. Быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из братьев за 2 ч., если путь, проделанный старшим братом за это время, на 40 км больше?

12) Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжил путь до A, увеличив скорость на $6\frac{км}{ч}$. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

13) Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 ч. после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч. 30 мин. Раньше, чем пешеход в B. Найти скорости пешехода и велосипедиста, пологая, что оба все время двигались с неизменными скоростями.

14) Два приятеля в одной лодке прокатились по реке вдоль берега и вернулись по той же речной трассе через 5 ч. с момента отплытия. Весь рейс составил 10 км. По их подсчетам получилось, что на каждые 2 км против течения в среднем требовалось им столько же времени, сколько на каждые 3 км по течению. Найти скорость течения и время проезда туда и обратно.

15) Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч скорее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то и тогда будет выполнено только $\frac{3}{5}$ всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения данного задания?

16) Два рабочих, из которых второй начал работать полутора днями позже первого, работая независимо один от другого, оклеили обоями несколько комнат за 7 дней, считая с момента выхода на работу первого рабочего. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то первому для ее выполнения

понадобилось бы тремя днями больше, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно выполнил бы эту же работу?

17) Чан наполняется двумя кранами А и В. Наполнение чана только через кран А длится на 22 мин дольше, чем через кран В. Если же открыть оба крана, то чан наполнится за 1 ч. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?

18) В лабораторной установке некоторая жидкость поступает в сосуд через три входных крана. Если открыть все краны одновременно, то сосуд наполнится за 6 мин. Если же наполнять сосуд только через второй кран. то на это потребуется $\frac{3}{4}$ того времени, за которое может наполнится сосуд только через один первый кран. Через один третий кран этот сосуд наполняется на 10 мин дольше, чем через один второй кран. На какое время надо открывать каждый кран в отдельности для наполняемости сосуда?

19) Имеется кусок меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

20) Имелось два сплава меди с разным процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа выражающего в процентах содержание меди во втором сплаве. Затем оба эти сплава сплавили вместе, после чего содержание меди составило 36%. Определить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором – 12 кг.

21) Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

22) Сосуд объемом 8 л наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из сосудов откачали x литров воздуха и добавили такое же количество азота. Затем откачали x литров смеси и опять добавили такое же количество азота. В итоге в сосуде оказалось лишь 9% кислорода. Определить x.

23) В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор кислоты?

24) Из сосуда, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили водой; потом опять вылили столько же литров смеси, тогда в сосуде осталось 24 л чистой кислоты. Емкость сосуда 54 л. Сколько кислоты вылили в первый и во второй раз?

25) Цифры некоторого трёхзначного числа составляют геометрическую прогрессию. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то новое трёхзначное число будет на 594 меньше искомого. Если же в искомом числе зачеркнуть цифру сотен и в полученном двузначном числе переставить его цифры, то новое двузначное число будет на 18 меньше числа, выраженного двумя последними цифрами искомого числа. Найти это число.

16. Решить задачу

1) Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Ответ: а) да; б) нет; в) 91.

2) За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью - 0,5 очка, за проигрыш - 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m=3$, $d=2$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m+d=10$.

в) Каковы все возможные значения d, если $m=7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

Ответ: а) 14; б) 90; в) 1.

3) Известно, что a, b, c, и d - попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$.

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6b$

Ответ: а) Да, например, если $a=10, b=20$ б) нет; в) $\frac{79}{21}$

4) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор −11, −7, −5, −4, −1, 2, 6. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Ответ: а) -7, -4, 6; б) 5; в) нет.

5) На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две - третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Ответ: а) нет; б) да; в) 8 минут.

6) Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

7) Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12. В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

а) Найдите этот закон.

б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).

в) Докажите, что число 21991 после нескольких переходов станет однозначным.

Ответ: а) удвоенная сумма цифр; б) 18.

8) В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности:

а) набор цифр 1234; 3269;

б) вторично набор 1975;

в) набор 8197?

Ответ: а) нет; б) да; в) да.

9) Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

10) У Лены три набора, в каждом из которых одинаковое количество ручек (больше 1). У Юли несколько (больше 1) наборов ручек, по 5 штук в каждом.

а) При каком количестве наборов у Юли, количество всех ручек у Лены нечетно, если всего у девочек 105 ручек?

б) Можно ли разложить все ручки Юли и Лены в 12 наборов по 12 ручек в каждом?

в) Можно ли разложить все ручки Юли и Лены в k наборов по k ручек в каждом ($k > 3$)?

Ответ: а) 18, 12, 6; б) да; в) да.

11) Рассматривается набор гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь равен 500 граммов. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее вес, выраженный целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешено некоторым количеством гирь набора, и притом единственным образом (тело кладется на одну чашу весов, гири – на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми).

а) Приведите пример правильного набора, в котором не все гири по одному грамму.

б) Сколько существует различных правильных наборов?

(Два набора различны, если некоторая гиря участвует в этих наборах не одинаковое число раз.)

Ответ: а) 167 кг., 167 кг., 166 кг. или 166 гирь по 3 кг, 2 гири по 1 кг.; б) три набора.

12) а) В классе была дана контрольная. Известно, что по крайней мере две трети задач этой контрольной оказались трудными: каждую такую задачу не решили по крайней мере две трети школьников. Известно также, что по крайней мере две трети школьников класса написали контрольную хорошо: каждый такой школьник решил по крайней мере две трети задач контрольной. Могло ли такое быть?

б) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на три четверти?

в) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на семь девятых?

Ответ: а) да; б) да, изменится; в) да, изменится.

24. Примерный вариант для письменных вступительных экзаменов по математике

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 13 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 3 задания повышенного уровня сложности и 2 задания более высокого уровня сложности.

Часть 1

При выполнении заданий 1–8 нужно переписать задание и написать правильный ответ (при необходимости привести полное решение). Ответом на задания 1–8 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

1. Вычислите: $0{,}86 : \frac{43}{20}$.

2. Найдите корень уравнения $2^{9+x} = 8$.

3. Вычислите: $\frac{\left(4^{-4}\right)^{-2}}{4^{12}}$.

4. Найдите значение выражения: $\log_2 76{,}8 - \log_2 2{,}4$.

5. Налог на доходы составляет 13%. Сколько рублей составляет заработная плата Андрея Петровича, если после удержания налога он получил 19140 рублей?

6. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B.

7. Решите уравнение $3x - 7 + 2(3 - x) = -x + 8$.

8. Найдите значение выражения $\frac{4z}{z^2 - 9} - \frac{2}{z - 3} - \sqrt{2}$ при $z = \sqrt{2} - 3$.

Часть 2

При выполнении заданий 9–13 нужно переписать задание, а затем привести полное обоснованное решение и записать ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9. Найдите корни уравнения $\log_2(6 - x) = \log_4 x$

10. Найдите корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

11. Решите неравенство: $0{,}8^{\frac{x-5}{3x+1}} \geq 0{,}8^{\frac{x-6}{3x-2}}$.

12. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого последующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на

10%), затем Сергей переводит в банк 53 240 рублей. Сергей выплатил долг тремя равными платежами. Какова сумма, взятая Сергеем в долг?

13. В треугольнике *ABC* на сторонах *BC* и *AC* взяты соответственно точки *M* и *N* так, что *BM*:*MC* = 1:3, а *AN*:*NC* = 2:5. Прямые *AM* и *BN* пересекаются в точке *O*. Найдите отношения *AO*:*OM* и *BO*:*ON*.

25. Примерный вариант заданий по математике (тестирование)

1. Вычислите $4\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\cdot 7{,}5$.

1) $21\frac{1}{4}$ 2) $23\frac{1}{2}$ 3) 23 4) 21

2. Найдите значение выражения $3\cdot 4^3+2\cdot 3^3$.

1) 246 2) 248 3) 236 4) 238

3. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)$.

1) $\sqrt{6}$ 2) 6 3) 5 4) $\sqrt{5}$

4. Найдите корень уравнения $-3+4(-7+5x)=9x-9$.

1) 2 2) 4 3) 3 4) 2,5

5. В треугольнике *ABC* *AD* – биссектриса, угол *C* равен 41°, угол *BAD* равен 69°. Найдите угол *ADB*. Ответ дайте в градусах.

1) 30° 2) 110° 3) 60° 4) 120°

6. В первом ряду кинозала 24 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в восьмом ряду?

1) 42 2) 40 3) 36 4) 38

7. Найдите значение выражения $\log_7 0{,}5+\log_7 98$.

1) 5 2) 7 3) 2 4) 4

8. Найдите корень уравнения $3^{5+x}=9$.

1) –3 2) 2 3) 3 4) –4

9. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 10%?

1) 209 2) 208 3) 200 4) 210

10. Найдите значение выражения $\frac{x\cdot x^8}{x^4}$ при $x=6$.

1) 1296 2) 216 3) 36 4) 7776

11. Решите уравнение $tg\frac{\pi(x-5)}{3}=-\sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

1) 5 2) –2 3) 1 4) 2

12. Найдите $-20\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}8$.

1) 5,6 2) –2,6 3) 1,4 4) –3,2

13. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(8-x)=-2$.

1) 6 2) –4 3) 7 4) 4

14. Найдите значение выражения $10p(a) - 60a - 4$, если $p(a) = 6a - 2$.

1) 26 2) –24 3) 20 4) –22

15. Найдите наибольшее значение функции $y = -15x^2 - x^3 + 6$ на отрезке $[-0{,}5;10]$.

1) 4 2) 2 3) 6 4) 15

16. Найдите корень уравнения $\sqrt{-72 - 17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

1) –9 2) 8 3) –8 4) –11

17. Бассейн прямоугольной формы имеет длину 50 м и разделён на 6 дорожек шириной 2,5 м каждая. Найдите площадь этого бассейна.

1) 450 2) 300 3) 600 4) 750

18. Решите уравнение $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

1) 4 2) 2 3) 1 4) 3

19. Решите неравенство $\log_5(2x - 4) < \log_5(x + 3)$.

1) $-3 < x < 2$ 2) $2 < x < 7$ 3) $-3 < x \le 2$ 4) $2 < x \le 7$

20. Найдите производную функции $y = e^{3x} - x^7$ $y = e^{3x} - x^7$.

1) $e^{3x} - 7x^6$ 2) $3e^{3x} - 7x^6$ 3) $3e^{x} - 7x^6$ 4) $3e^{3x} - x^6$

Литература:

1. Авилов Н.И., Дерезин С.В, Домашенко А.М. и др. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2020. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2020 года: учебно-методическое пособие/ под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2019. – 416 с.

2. Образовательный портал «Решу ЕГЭ» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://math-ege.sdamgia.ru/

3. Ященко И.В. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий/ под ред. И.В. Ященко. – М.: Изд-во «Экзамен», 2020. – 167 с.

4. Ященко И.В. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 20 вариантов экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь/ И.В. Ященко, С.А. Шестаков; под ред. И.В. Ященко. – М.: Изд-во «Экзамен», МЦНМО, 2020. – 295 с.

Антоненкова Ольга Евгеньевна
Баранова Ирина Михайловна
Камозина Олеся Владимировна
Козлова Ольга Никоваевна
Охлупина Ольга Валентиновна
Часова Наталья Александровна

Математика
будущему инженеру

Учебное пособие для выпускников школ, поступающих в технический вуз

Формат 60х94 1/16. Тираж 100 экз. Печ. л. – 6,8. Бесплатно.
ФГБОУ ВО «Брянский государственный
инженерно-технологический университет».
241037. г. Брянск, пр. Станке Димитрова, 3.